EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dada la función $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Máximos y mínimos locales.
d) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:
a)

y es una función polinómica, por lo tanto, su dominio es todos los números reales. Dom y = $\Re$

Puntos de corte de la función y con los ejes coordenados.
x = 0; y = 3; punto de corte con el eje OY (0 , 3)
y = 0; $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$*, resolvemos esta ecuación por Ruffini*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & & 1 & 3 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

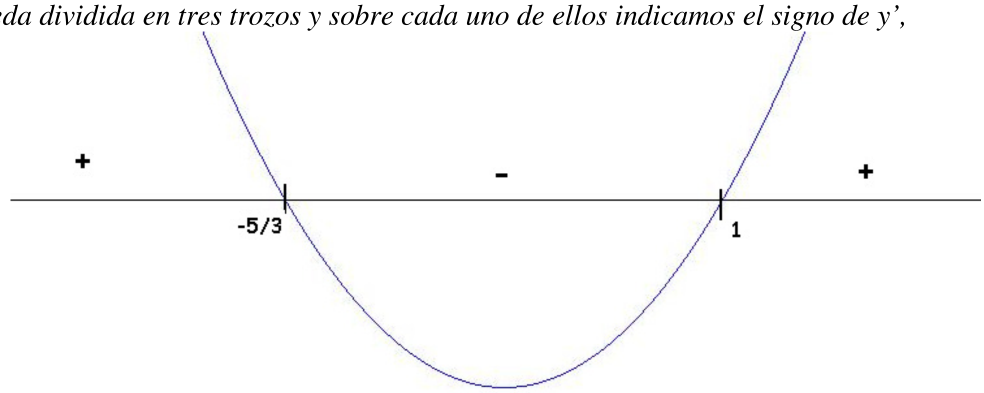
La ecuación tiene dos soluciones
x = 1, solución doble
x = – 3
Puntos de corte con el eje OX
(1 , 0) y (– 3 , 0)

b) Estudiar la monotonía de y. Debemos estudiar el signo de y'.
$y' = 3x^2 + 2x - 5$
Resolvemos $3x^2 + 2x - 5 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,.\,3\,.\,(-5)}}{2\,.\,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+8}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-2-8}{6} = \dfrac{-10}{6} = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$$

Representamos en la recta real los dos valores de x obtenidos; dibujamos, de forma aproximada, la parábola que representa a y'.
La recta queda dividida en tres trozos y sobre cada uno de ellos indicamos el signo de y',



Por lo tanto la función y es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{-5}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ *y decreciente en* $\left(\dfrac{-5}{3}, 1\right)$

c) Máximos y mínimos locales.
Resolvemos y' = 0 , ya resuelto en el apartado anterior.
Calculamos y'' = 6 x + 2
para x = – 5/3 ; y'' = 6 (– 5/3) + 2 = – 10 + 2 = – 8 < 0 ; hay un máximo local
para x = 1 ; y'' = 6 . 1 + 2 = 8 > 0; hay un mínimo local.
Calculemos las ordenadas de los extremos,
para x = 1, según calculamos en el apartado a) y = 0 ; Mínimo local en (1 , 0)

para

$$x=\frac{-5}{3} \quad \rightarrow \quad y=\left(\frac{-5}{3}\right)^3+\left(\frac{-5}{3}\right)^2-5\left(\frac{-5}{3}\right)+3=\frac{-125}{27}+\frac{25}{9}+\frac{25}{3}+3=$$

$$=\frac{-125+75+225+81}{27}=\frac{256}{27}$$

Máximo local en $\left(\frac{-5}{3},\frac{256}{27}\right)\approx$ $(-1'67,9'48)$

d) Representación gráfica.

En los ejes coordenados marcamos los puntos de corte obtenidos en el apartado a), los extremos relativos del apartado c) y teniendo en cuenta la monotonía estudiada en el apartado b), la representación gráfica de la función y será,