Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II   Junio 2006

EJERCICIO B

PROBLEMA 3.

a) Estudia la continuidad en el intervalo [-3,3] de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+10 & -3\le x<-2 \\ x^2 & -2\le x<1 \\ \dfrac{x+3}{2} & 1\le x\le 3 \end{cases}$$

b) Halla la integral entre 2 y 3 de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$.

Solución:

a)

En el intervalo [– 3 , 3] f(x) está definida mediante tres trozos, estudiemos la continuidad de cada trozo y en los puntos de cambio de definición.

En el intervalo (– 3 , – 2) f(x) está definida como 3 x + 10, un polinomio, luego es continua.

En el intervalo (– 2 ,1) f(x) está definida como x^2, un polinomio, luego es continua.

En el intervalo (1 ,3) f(x) está definida como (x + 3)/2 , un polinomio, luego es continua.

Veamos la continuidad de f(x) en los puntos de cambio de definición.

Para x = – 2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$ $$\lim_{x\to -2} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (3x+10) = 3(-2)+10 = 4 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} x^2 = (-2)^2 = 4 \end{array} \right\} = 4$$ $$f(-2) = \lim_{x\to -2} f(x)$$ *Luego f(x) es continua en x = – 2*
Para x = 1	$$f(1) = \frac{1+3}{2} = 2$$ $$\lim_{x\to 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2 \end{array} \right\} 1 \ne 2 \quad \text{No existe } \lim_{x\to 1} f(x)$$ *Luego f(x) no es continua en x = 1.* *En x = 1 f(x) presenta una discontinuidad de salto finito ya que existen los límites laterales pero son distintos.*

En conclusión f(x) es continua en (– 3 , 3) ~ { 1 } y en x = 1 tiene una discontinuidad de salto finito.

Como f(x) está definida en un intervalo cerrado, [– 3 , 3], en sentido estricto no podemos hablar de continuidad de f(x) en los extremos de este intervalo; en sentido no estricto podemos considerar que f(x) es continua en x = – 3 por ser continua a la derecha de este valor y que f(x) es continua en x = 3 por serlo a la izquierda de este valor. Con esta consideración de continuidad en los extremos del intervalo de definición de una función, podemos concluir que f(x) es continua en [– 3 , 3] ~ { 1 } y en x = 1 tiene una discontinuidad de salto finito.

b)

$$\int_2^3 \left(2x^3 - 3x + 2\right)dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3 = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3 = \left(\frac{81}{2} - \frac{27}{2} + 6\right) - \left(\frac{16}{2} - \frac{12}{2} + 4\right) =$$

$$= \frac{54}{2} + 6 - (8 - 6 + 4) = 27 + 6 - 6 = 27$$