EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Una fábrica de fertilizantes produce dos tipos de abono, A y B, a partir de dos materias primas M_1 y M_2. Para fabricar 1 tonelada métrica de A hacen falta 500 kg de M_1 y 750 kg de M_2, mientras que las cantidades de M_1 y M_2 utilizadas para fabricar 1 tonelada de B son 800 kg y 400kg, respectivamente. La empresa tiene contratado un máximo de 10 toneladas de cada materia prima y vende a 1.000 € y 1.500 € cada tonelada de abono de A y B, respectivamente. Sabiendo que la demanda de B nunca llega a triplicar la de A, ¿cuántas toneladas de cada abono debe fabricar para maximizar sus ingresos y cuáles son éstos?

Solución:

Utilizamos las incógnitas:

x = Tm del abono del tipo A

y = Tm del abono del tipo B

De los datos del problema podemos sacar la siguiente tabla:

	Materias primas		
	M_1	*M_2*	*Venta*
Abono A	*500 Kg*	*750 Kg*	*1000 €/Tm*
Abono B	*800 Kg*	*400 Kg*	*1500 €/Tm*
restricciones	*10000 Kg*	*10000 Kg*	

Los ingresos serían: 1000 x + 1500 y

Las restricciones son:

por la disponibilidad de la materia prima M_1: $500x + 800y \le 10000$

por la disponibilidad de la materia prima M_2: $750x + 400y \le 10000$

la demanda de B nunca llega a triplicar la de A $y < 3x$

El problema a resolver es:

maximizar $z = 1000x + 1500y$

$$s.a.\ \begin{cases} 500x + 800y \le 10000 \\ 750x + 400y \le 10000 \\ y < 3x \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

$500x + 800y \le 10000$

(1) $500x + 800y = 10000$

x	y
0	12´5
20	0

¿(0,0) *cumple*?

$500 \cdot 0 + 800 \cdot 0 \le 10000$ *sí*

$750x + 400y \le 10000$

(2) $750x + 400y = 10000$

x	y
0	25
$\frac{40}{3}$	0

¿(0,0) *cumple*?

$0´3 \cdot 0 + 0´5 \cdot 0 \le 90$ *sí*

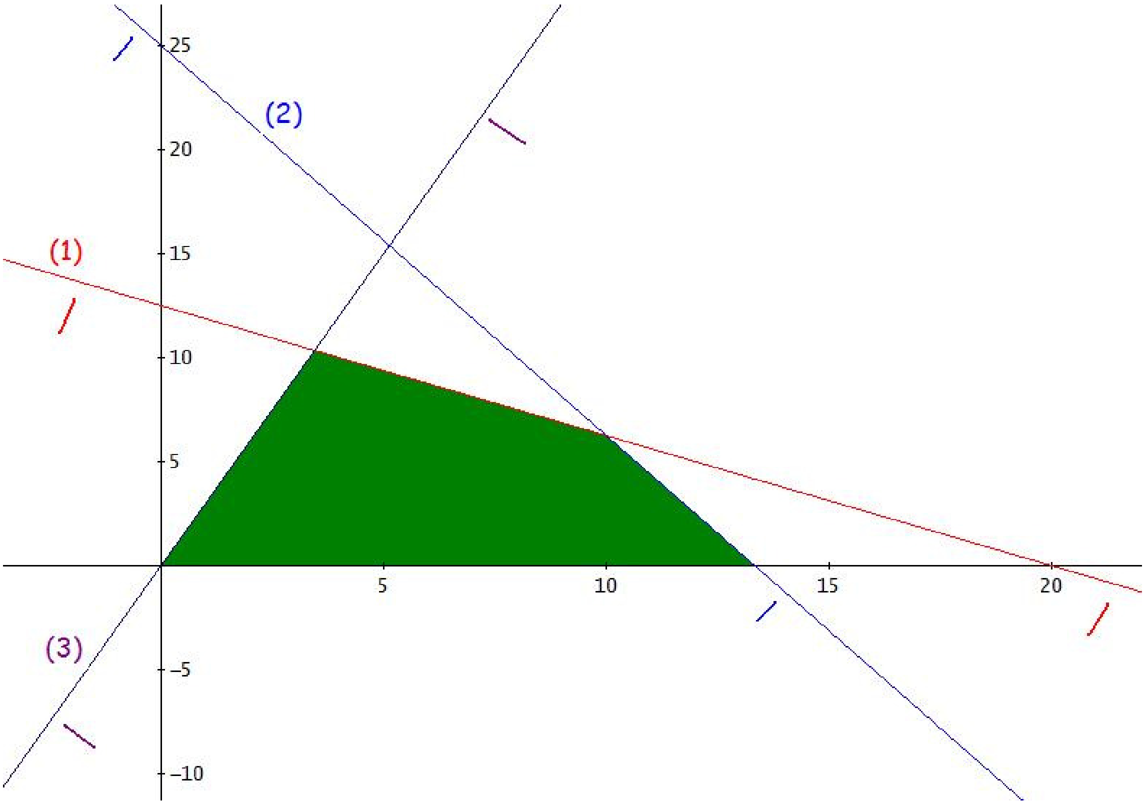
$y < 3x$

(3) $y = 3x$

x	y
0	0
5	15

¿(5,0) *cumple*?

$0 < 3 \cdot 5$ *sí*



Debemos calcular los siguientes puntos de corte,

$$\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}500x+800y=10000\\ y=3x\end{cases} \qquad 500x+800\,.\,3x=10000 \;\rightarrow\; 500x+2400x=10000 \;\rightarrow\; 2900x=10000 \;\rightarrow$$

$$x=\frac{10000}{2900}=\frac{100}{29}=3´448$$

$$\rightarrow \quad y=3\frac{100}{29}=\frac{300}{29}=10´344 \quad \rightarrow \quad (\frac{100}{29},\frac{300}{29})$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}500x+800y=10000\\ 750x+400y=10000\end{cases}$$

$$\begin{matrix}1^{a}:(-2)\\ 2^{a}\end{matrix}\begin{cases}-250x-400y=-5000\\ 750x+400y=10000\end{cases}$$

sumando,

$500x=5000$

$x=10$

sustituyendo en 1^{a},

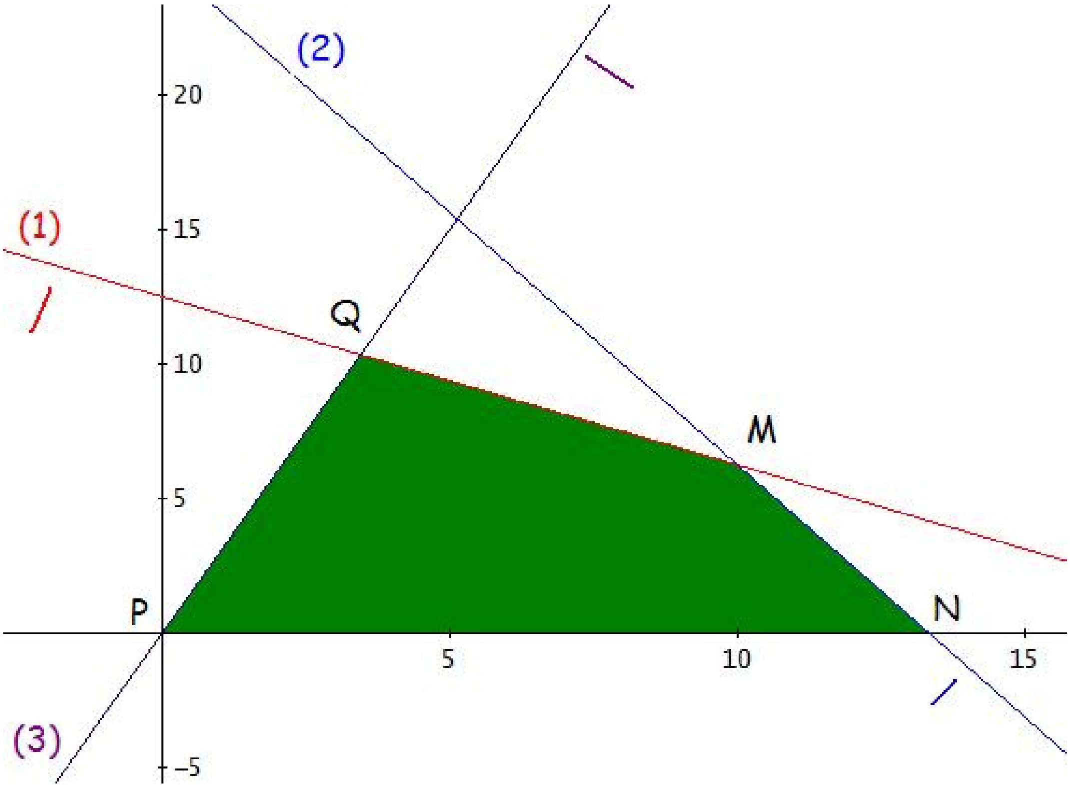
$500\,.\,10+800y=10000$

$800y=5000$

$y=\frac{5000}{800}=6´25 \quad \rightarrow \quad (10\,,6´25)$

La región factible está limitada por los puntos

$$M(10\,,\,6´25),\; N(\frac{40}{3}\,,\,0),\; P(0\,,\,0)\;\; y\;\; Q\left(\frac{100}{29}\,,\,\frac{300}{29}\right)$$



Sabemos que la función que queremos maximizar alcanzará su máximo en los extremos de la región factible.

(x, y)	$z = 1000x + 1500y$
$(0,0)$	$1000\,.\,0 + 1500\,.\,0 = 0$
$\left(\frac{100}{29}, \frac{300}{29}\right)$	$1000\,.\,\frac{100}{29} + 1500\,.\,\frac{300}{29} = 18965{'}517$
$(10\,,\,6{'}25)$	$1000\,.\,10 + 1500\,.\,6{'}25 = 19375$ *máximo*
$\left(\frac{40}{3}, 0\right)$	$1000\,.\,\frac{40}{3} + 1500\,.\,0 = 13333{'}333$

El máximo se alcanza en el punto (10 , 6´25). Por lo que para maximizar sus ingresos la fábrica debe producir 10 Tm del abono tipo A y 6´25 Tm del tipo B.
Con esta producción los ingresos serían de 19375 €.