EJERCICIO A

PROBLEMA 3. a) Estudia la continuidad de la función y = f(x) en el intervalo [– 4 , 2], siendo

$$f(x)=\begin{cases} 2 & x\le -3 \\ x^2 & -3<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función y = f(x), las rectas x = – 3, x = 2 y el eje de abcisas.

Solución:

a) Continuidad en [– 4 , 2],

Para $-4\le x<-3$, $f(x)=2$, función constante, luego es continua.

Para $-3<x<1$, $f(x)=x^2$, función polinómica, luego continua.

Para $1<x\le 2$, $f(x)=1$, función constante, luego es continua.

Debemos estudiar la continuidad en los cambios de definición.

Para x = – 3

a) f(– 3) = 2

$$b)\ \lim_{x\to -3} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-} 2=2 \\ \lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+} x^2=(-3)^2=9 \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos no existe el $\lim_{x\to -3} f(x)$

Luego, f(x) es discontinua en x = – 3, por existir los dos límites laterales es una discontinuidad de salto finito.

Para x = 1

a) f(1) = 1

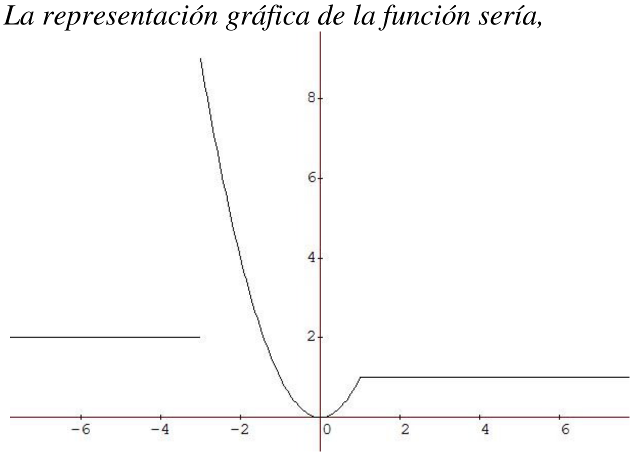
$$b)\ \lim_{x\to 1} f(x)=\left.\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1^2=1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 1=1 \end{cases}\right\}=1$$

$$c)\ f(1)=1=\lim_{x\to 1} f(x)$$

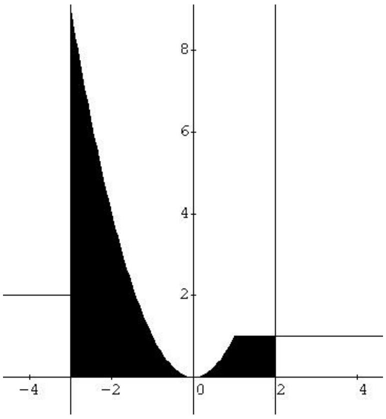
Luego, f(x) es continua en x =1.

En resumen, f(x) es continua en [– 4 , 2]~{ – 3} y en x = – 3 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) La representación gráfica de la función sería,



El área a calcular es,



$$A = \int_{-3}^{1} x^2 \, dx + \int_{1}^{2} 1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{1} + \left[x \right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{(-3)^3}{3} + 2 - 1 = \frac{1}{3} - \frac{-27}{3} + 1 = \frac{1}{3} + 9 + 1 = \frac{1}{3} + 10 = \frac{31}{3} \, u.\, a.$$