EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Determina la matriz X que verifica A X + I = A B^t , siendo I la matriz identidad, A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y B^t la traspuesta de la matriz B.

Solución:

$A X + I = A B^t$

$A X = A B^t - I$, *si existe* A^{-1} *podremos despejar X como sigue:*

$X = A^{-1} (A B^t - I) = A^{-1} A B^t - A^{-1} I = B^t - A^{-1}$

$$\text{Como} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad \to \quad \exists\, A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{i\,j}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{i\,j}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{j\,i}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{luego} \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$X = B^t - A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$