EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$, determina:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos relativos.
e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Solución:

a) Dominio de la función,

$4 - x^2 = 0;\quad 4 = x^2;\quad x = \pm 2$

$$Dom\ f = \Re - \{-2, 2\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados: (0,0)

$$x=0 \quad\to\quad y=\frac{0}{4-0}=0 \quad\to\quad (0,0)$$

$$y=0 \quad\to\quad 0=\frac{x^2}{4-x^2} \quad\to\quad 0=x^2 \quad\to\quad x=0 \quad\to\quad (0,0)$$

b) Asíntotas.

Asíntotas verticales

Veamos si $x = 2$ es una asíntota vertical,

$$\underset{x\to 2}{Lím}\frac{x^2}{4-x^2}=\frac{2^2}{4-2^2}=\frac{4}{4-4}=\frac{4}{0}=\infty \quad \text{luego } x = 2 \text{ es A.V.}$$

Para situar la curva respecto de la asíntota estudiemos los límites laterales

$$\underset{x\to 2^-}{Lím}\frac{x^2}{4-x^2}=\frac{1{,}9^2}{4-1{,}9^2}\infty=\frac{+}{+}\infty=+\infty$$

$$\underset{x\to 2^+}{Lím}\frac{x^2}{4-x^2}=\frac{2{,}1^2}{4-2{,}1^2}\infty=\frac{+}{-}\infty=-\infty$$

Veamos si $x = -2$ es una asíntota vertical,

$$\underset{x\to -2}{Lím}\frac{x^2}{4-x^2}=\frac{(-2)^2}{4-(-2)^2}=\frac{4}{4-4}=\frac{4}{0}=\infty \quad \text{luego } x = -2 \text{ es A.V.}$$

Para situar la curva respecto de la asíntota estudiemos los límites laterales

$$\underset{x\to -2^-}{Lím}\frac{x^2}{4-x^2}=\frac{(-2{,}1)^2}{4-(-2{,}1)^2}\infty=\frac{+}{-}\infty=-\infty$$

$$\underset{x\to -2^+}{Lím}\frac{x^2}{4-x^2}=\frac{(-1{,}9)^2}{4-(-1{,}9)^2}\infty=\frac{+}{+}\infty=+\infty$$

Asíntota horizontal

$$\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{x^2}{4-x^2}=\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)=\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{x^2}{-x^2}=\underset{x\to +\infty}{Lím}(-1)=-1$$

$$\underset{x\to -\infty}{Lím}\frac{x^2}{4-x^2}=\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)=\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{x^2}{-x^2}=\underset{x\to +\infty}{Lím}(-1)=-1$$

Luego $y = -1$ es la A.H.

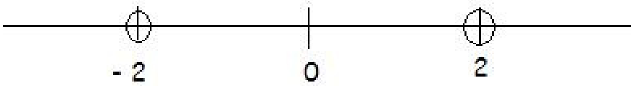
Asíntota oblicua

grd(num) – grd(den) = 2 – 2 = 0,   luego no hay asíntota oblicua

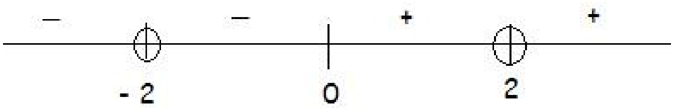
c) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Debemos estudiar el signo de la primera derivada.*

$$f'(x) = \frac{2x\left(4-x^2\right)-x^2(-2x)}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{8x-2x^3+2x^3}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{8x}{\left(4-x^2\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,
$8x = 0;\quad x = 0$
$(4-x^2)^2 = 0;\quad 4-x^2 = 0;\quad 4 = x^2;\quad x = \pm 2$
Representamos las raíces obtenidas, junto con los valores que no son del dominio de la función, en la recta real.



La primera derivada es un cociente cuyo denominador es un polinomio al cuadrado, por lo que el denominador es positivo; es decir, el signo de la derivada depende del signo del numerador. Entonces tenemos:

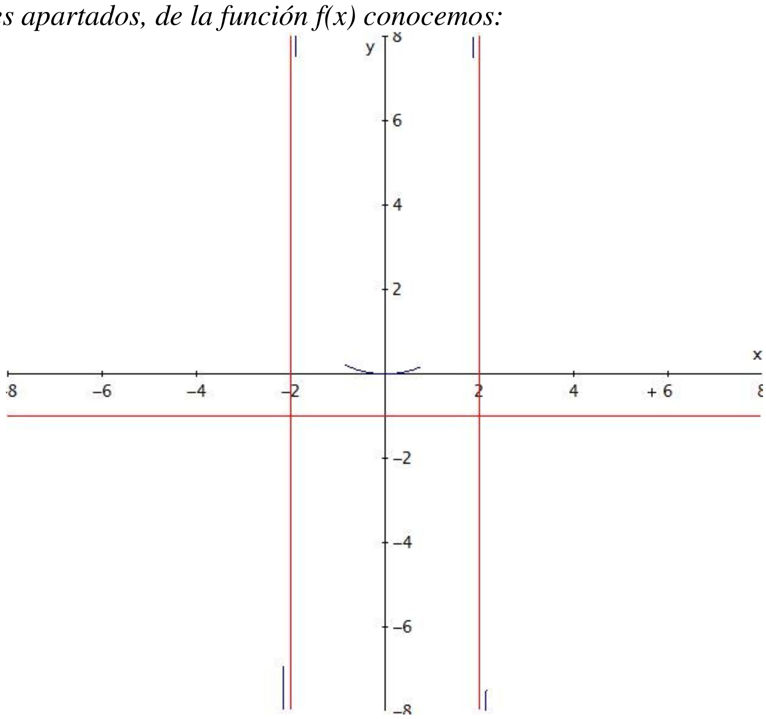


Luego f(x) es creciente en $(0\,,2)\cup(2\,,+\infty)$ *y decreciente en* $(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,0)$

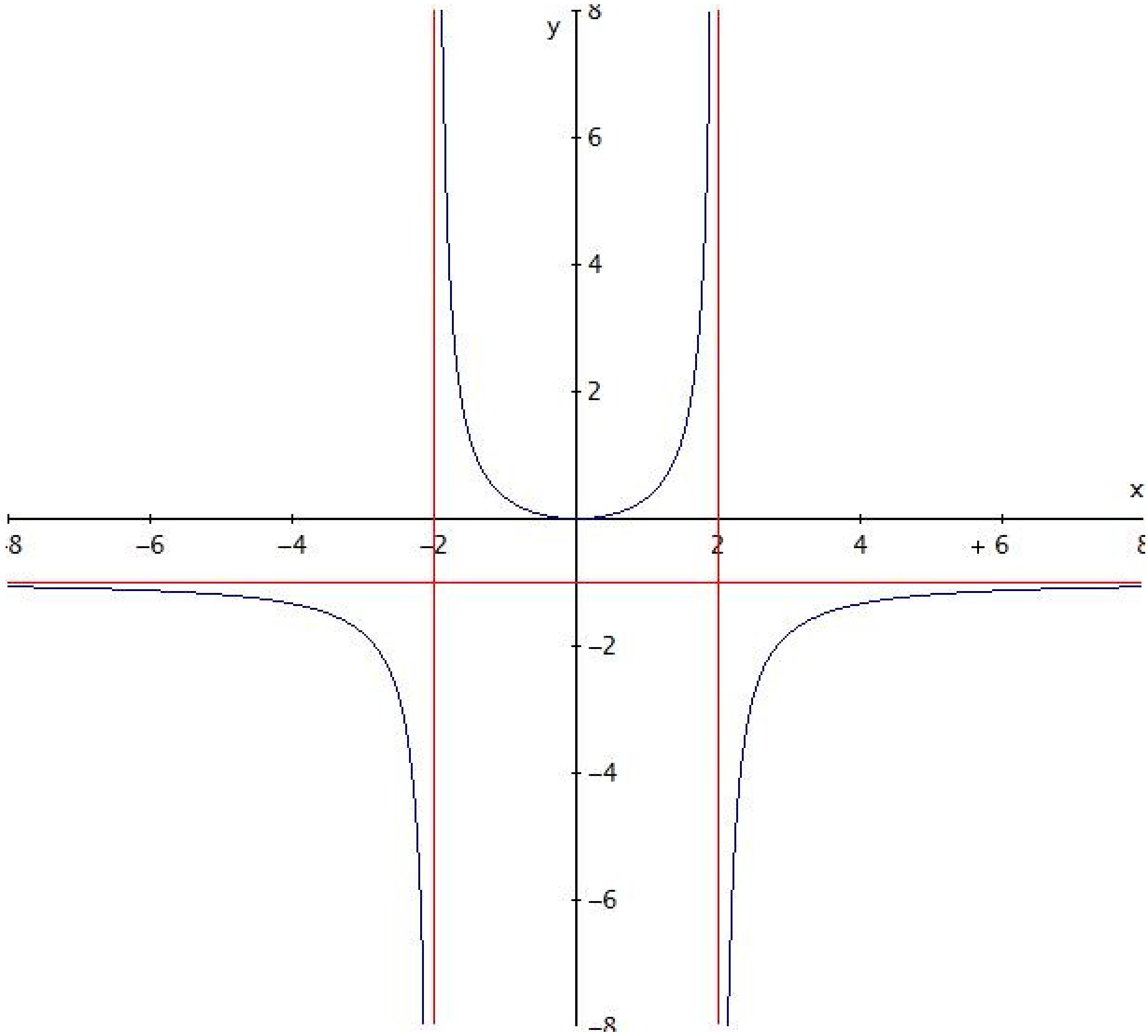
d) *Máximos y mínimos relativos.*
De lo obtenido en el apartado anterior se deduce que f(x) tiene un mínimo relativo en x = 0; teniendo en cuenta los puntos obtenidos en el apartado a): f(x) tiene un mínimo relativo en (0 , 0)

e) *Reuniendo la información obtenida en los anteriores apartados, de la función f(x) conocemos:*

Marcamos:
El punto de corte (0,0)
El mínimo relativo (0,0)
La posición de la curva respecto de las asíntotas verticales



Y la representación gráfica de la función será:



y
x
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
2
4
+ 6
8