EJERCICIO B

PROBLEMA 3. El coste de fabricación en euros de x unidades de un artículo viene dado por la función $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$

a) ¿Cuál es la función que determina el coste de fabricación unitario?

b) ¿Para qué producción resulta mínimo el coste unitario? ¿Cuánto vale éste? Justifica que es mínimo.

Solución:

a) La función que determina el coste de fabricación unitario es

$$u(x) = \frac{x - 2\sqrt{x} + 20}{x} \qquad x = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

b) Buscamos los mínimos relativos de la función u(x) y después obtendremos el mínimo absoluto.

Calculemos u´(x)

$$u'(x) = \frac{\left(1 - \frac{2}{2\sqrt{x}}\right)x - \left(x - 2\sqrt{x} + 20\right)1}{x^2} = \frac{x - \frac{x}{\sqrt{x}} - x + 2\sqrt{x} - 20}{x^2} = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} - 20}{x^2} = \frac{-\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} - 20}{x^2} =$$

$$= \frac{-\frac{x\sqrt{x}}{x} + 2\sqrt{x} - 20}{x^2} = \frac{-\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 20}{x^2} = \frac{\sqrt{x} - 20}{x^2}$$

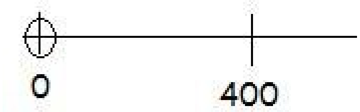
Estudiemos el signo de u´(x); como u´ es un cociente calculamos las raíces del numerador y denominador,

$$\sqrt{x} - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x} = 20 \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = 20^2 \quad \rightarrow \quad x = 400$$

$$x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

x = 0 no es del dominio de la función u(x).

Representamos en la recta los valores obtenidos



x	$u'(x)$
100	$\frac{\sqrt{100} - 20}{100^2} = \frac{10 - 20}{100^2} = -$
625	$\frac{\sqrt{625} - 20}{625^2} = \frac{25 - 20}{625^2} = +$

Por lo tanto en x = 400 hay un mínimo relativo.

Para comprobar que este mínimo relativo es absoluto veamos los valores de la función u(x) en x = 1 y x = 400

x	$u(x)$
1	$\frac{1 - 2\sqrt{1} + 20}{1} = \frac{21 - 2}{1} = 19$
400	$\frac{400 - 2\sqrt{400} + 20}{400} = \frac{420 - 40}{400} = \frac{380}{400} = 0{'}95$

Luego queda probado que el mínimo relativo es absoluto de la función u(x).

En resumen: el coste unitario resulta mínimo para una producción de 400 unidades y este coste unitario es de 0´95 €