Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II   Junio 2009

BLOQUE B

PROBLEMA B1. Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} -x & x<-1 \\ x-1 & -1\le x<4 \\ x^2-2x-6 & 4\le x<6 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función *f(x)* en el intervalo] – 2 , 6 [.
b) Calcula el área de la región del plano limitada por *y = f(x)* y por las rectas y = 0, x = 1 y x = 5.

Solución:

a) Continuidad de la función f(x) en el intervalo] – 2 , 6 [

Por ser f(x) una función definida a trozos estudiamos su continuidad en cada uno de los trozos y en los puntos de cambio de definición.

Para x Є] – 2 , – 1 [, f(x) = – x, una función polinómica de primer grado, luego es continua.
Para x Є] – 1 , 4 [, f(x) = x – 1, una función polinómica de primer grado, luego es continua.
Para x Є] 4 , 6 [, f(x) =x^2 *– 2 x – 6, una función polinómica de segundo grado, luego es continua.*

Veamos que pasa en x = – 1 y en x = 4.

x = – 1

f(– 1) = – 1 – 1 = – 2, existe f(– 1).

$$\underset{x\to -1}{Lím} f(x)=\begin{cases} \underset{x\to -1^-}{Lím} f(x)=\underset{x\to -1^-}{Lím}(-x)=-(-1)=1 \\ \underset{x\to -1^+}{Lím} f(x)=\underset{x\to -1^+}{Lím}(x-1)=-1-1=-2 \end{cases}$$

como los resultados de los límites laterales no son iguales, no existe el límite de la función en x = – 1
Por lo tanto f(x) no es continua en x = – 1
Como existen los dos límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

x = 4

f(4) = 4^2 *– 2 . 4 – 6 =16 – 8 – 6 = 2 , existe f(4).*

$$\underset{x\to 4}{Lím} f(x)=\begin{cases} \underset{x\to 4^-}{Lím} f(x)=\underset{x\to 4^-}{Lím}(x-1)=4-1=3 \\ \underset{x\to 4^+}{Lím} f(x)=\underset{x\to 4^+}{Lím}(x^2-2x-6)=4^2-2\,.\,4-6=16-8-6=2 \end{cases}$$

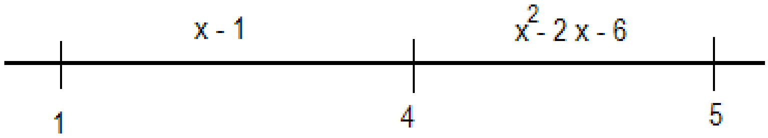
como los resultados de los límites laterales no son iguales, no existe el límite de la función en x = 4
Por lo tanto f(x) no es continua en x = 4
Como existen los dos límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

Luego f(x) es continua en] – 2 , 6 [~ { – 1 , 4 } y en x = – 1 y en x = 4 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Área de la región del plano limitada por y = f(x) y por las rectas y = 0, x = 1 y x = 5.

Para calcular el área pedida es conveniente representar la función f(x), aunque sólo para valores de x desde 1 hasta 5.

En el intervalo [1 , 5] la función f(x) está definida como se indica a continuación,



En el primer trozo f(x) está definida como x – 1, que gráficamente es una línea recta, la dibujamos a partir de una tabla de valores,

x	y
1	0
4	3

En el segundo trozo f(x) está definida como x^2 *– 2 x – 6, gráficamente es una parábola, usamos tabla de valores para conocer el principio y el final y el calculamos el vértice de la parábola para dibujarla correctamente,*

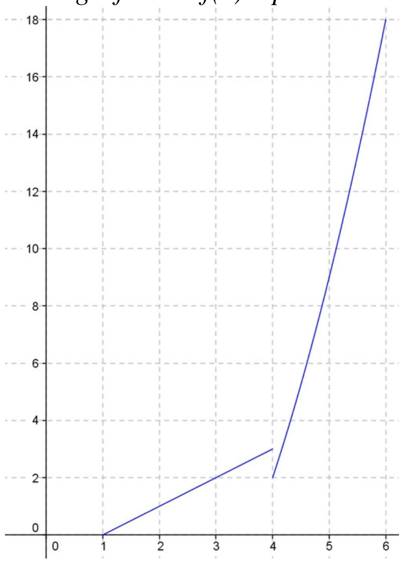
x	y
4	$4^2-2\,.\,4-6=2$
5	$5^2-2\,.\,5-6=9$

Vértice $(1,-7)$

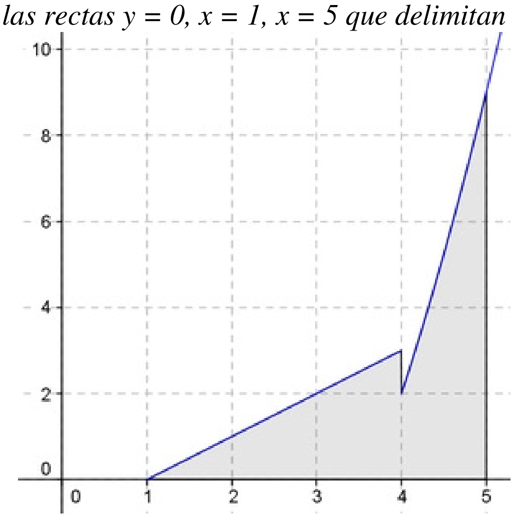
$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2.1}=1$$

$$y=1^2-2\,.\,1-6=-7$$

La representación gráfica de f(x) a partir de x = 1 será,



Añadiendo las rectas y = 0, x = 1, x = 5 que delimitan la región obtenemos,



El área de la región indicada la obtendremos mediante el siguiente cálculo integral,

$$A=\int_1^4 (x-1)\,dx+\int_4^5 (x^2-2x-6)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4-\left[\frac{x^3}{3}-x^2-6x\right]_4^5=$$

$$=\left(\frac{4^2}{2}-4\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)+\left(\frac{5^3}{3}-5^2-6\,.\,5\right)-\left(\frac{4^3}{3}-4^2-6\,.\,4\right)=4+\frac{1}{2}+\frac{125}{3}-55-\frac{64}{3}+40=\frac{1}{2}+\frac{61}{3}-11=$$

$$=\frac{3+122-66}{6}=\frac{59}{6}\;u.a.$$