BLOQUE D

PROBLEMA D1. El rendimiento de cierto producto en función del tiempo de uso (medido en años) viene dado por la expresión:

$$f(x) = 8{,}5 + \frac{3x}{1+x^2}, \quad x \geq 0$$

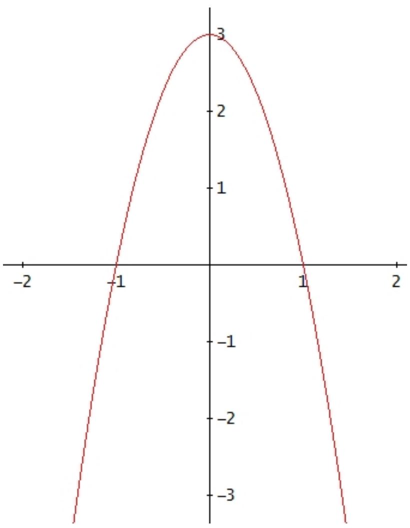
a) ¿Existen intervalos de tiempo en los que el rendimiento crece? ¿Y en los que decrece? ¿Cuáles son?
b) ¿En qué punto se alcanza el rendimiento máximo? ¿Cuánto vale éste?
c) Por mucho que pase el tiempo, ¿puede llegar a ser el rendimiento inferior al rendimiento que el producto tenía inicialmente? ¿Por qué?

Solución:
En la definición de la función hay un cociente cuyo denominador es $1 + x^2$, que siempre es distinto de cero. Por lo que el dominio de f(x), teniendo en cuenta su definición, será $[\ 0\ ,\ +\infty\ )$
a) Crecimiento, decrecimiento.
Estudiemos el signo de f´(x).

$$f'(x) = \frac{3(1+x^2) - 2x\,.\,3x}{(1+x^2)^2} = \frac{3+3x^2-6x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}$$

Puesto que el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, el signo de f´(x) depende del numerador.
$3 - 3x^2 = 0;\quad 3 = 3x^2;\quad 1 = x^2;\quad x = \pm 1$
Considerando el dominio de definición de la función, debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:

Como hemos dicho anteriormente el signo de f´(x) depende del numerador que es un polinomio de 2º grado de raíces – 1 y 1. Por lo que podemos obtener el signo del numerador mediante la representación gráfica de la correspondiente parábola,



Luego el signo de f´(x) en los intervalos a estudiar es,

Por lo tanto, f(x) es creciente en el intervalo $(\ 0\ ,\ 1\ )$ y decreciente en $(\ 1\ ,\ +\infty\ )$.

b) Máximo.
Según lo estudiado anteriormente como f(x) es creciente en el intervalo $(\ 0{,}1\ )$ y decreciente en $(\ 1{,}+\infty\ )$, alcanza su máximo para x = 1.

$$f(1) = 8{,}5 + \frac{3.1}{1+1^2} = 8{,}5 + \frac{3}{2} = 8{,}5 + 1{,}5 = 10$$

El valor máximo es 10.

c) Rendimiento.
Calculemos el rendimiento inicial, será para x = 0,

$$f(0) = 8{,}5 + \frac{3.0}{1+0^2} = 8{,}5 + \frac{0}{1} = 8{,}5 + 0 = 8{,}5$$

El rendimiento a largo plazo lo calculamos mediante el siguiente límite,

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(8{,}5 + \frac{3x}{1+x^2}\right) = 8'5 + \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3x}{1+x^2} \overset{(a)}{=}$$

Calculemos ahora el límite pendiente,

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3x}{1+x^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3x}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

luego $\overset{(a)}{=} 8{,}5 + 0 = 8{,}5$

Respondamos a la pregunta del ejercicio,

para $x \geq 0$ $\quad \dfrac{3x}{1+x^2} \geq 0$ *, luego f(x) ≥ 8,5 cuando x ≥ 0*

por lo que por mucho que pase el tiempo el rendimiento del producto se mantiene por encima del rendimiento inicial y va acercándose a este valor inicial.

Esto lo podemos observar en la gráfica de f(x),