OPCIÓN A

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-9}$, se pide

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de las asíntotas horizontales y verticales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:
a) Dominio

$$x^2-9=0 \quad\rightarrow\quad x^2=9 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{9} \quad\rightarrow\quad x=\pm 3 \quad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{-3,3\}$$

Puntos de corte

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2+1}{0^2-9}=\frac{1}{-9} \quad\rightarrow\quad \left(0,\frac{-1}{9}\right)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2+1}{x^2-9}=0 \quad\rightarrow\quad x^2+1=0 \quad\rightarrow\quad x^2=-1 \quad \textit{sin soluciones reales}$$

Sólo hay un punto de corte

$$\left(0,\frac{-1}{9}\right)$$

b) Asíntota horizontal

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-9}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-9}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1 \end{array}\right\}\Rightarrow y=1 \quad \textit{es la asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales. Las posibles asíntotas verticales son las rectas x = – 3 y x = 3 (corresponden a los valores de x que no son del dominio de la función)
x = – 3

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+1}{x^2-9}=\frac{(-3)^2+1}{(-3)^2-9}=\frac{9+1}{9-9}=\frac{10}{0}=\infty \qquad\rightarrow\quad x=-3 \textit{ es una asíntota vertical}$$

x = 3

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2+1}{x^2-9}=\frac{3^2+1}{3^2-9}=\frac{9+1}{9-9}=\frac{10}{0}=\infty \qquad\rightarrow\quad x=3 \textit{ es una asíntota vertical}$$

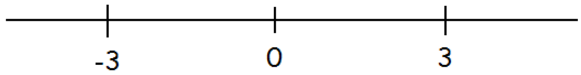
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
Para obtener estos intervalos estudiaremos el signo de la primera derivada,

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-9\right)-\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{2x^3-18x-2x^3-2x}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{-20x}{\left(x^2-9\right)^2}$$

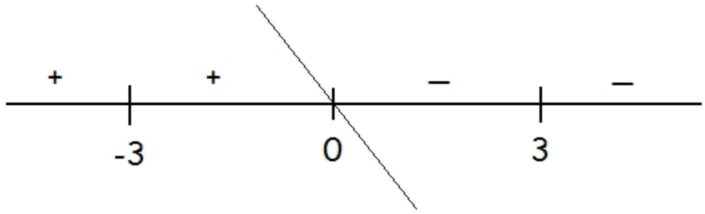
Estudiamos el signo de este cociente de polinomios buscando las raíces del numerador y denominador
– 20 x = 0 → x = 0

$$\left(x^2-9\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-9=0 \quad\rightarrow\quad x=\pm3 \qquad \textit{(visto en el apartado a))}$$

Ahora representamos en la recta real los tres valores de x obtenidos y, además, los que no son del dominio de la función,



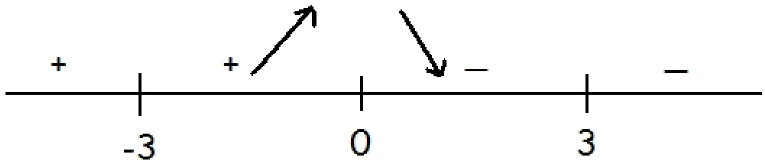
Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, será positivo; luego el signo de f´(x) sólo depende del signo del numerador que gráficamente es la recta y = – 20 x (de pendiente negativa y pasa por la raíz 0), esto significa que:



Y por lo tanto, f(x) es creciente en (–∞ , – 3) U (– 3 , 0) y decreciente en (0 , 3) U (3 , +∞)

d) Máximos y mínimos locales.

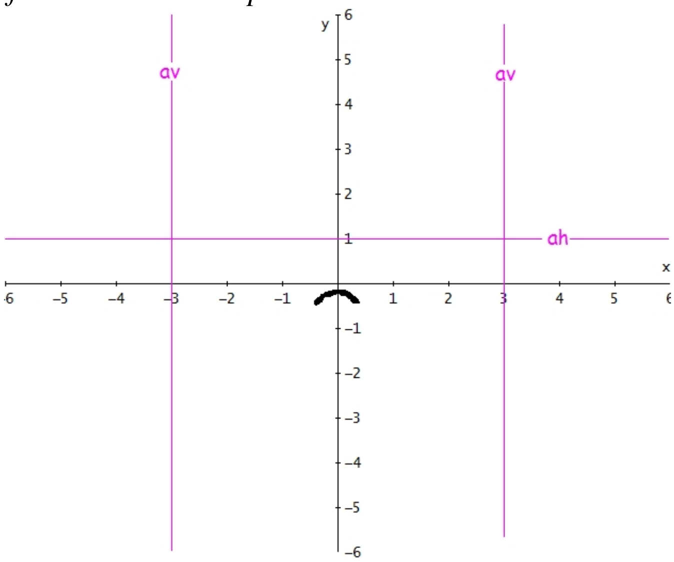
Estos puntos los obtenemos siguiendo con el estudio realizado en el apartado anterior.
De los tres valores de x marcados en la recta real, – 3 y 3 no son del dominio de f(x) por lo que el posible máximo o mínimo local será x = 0



En x = 0 hay un máximo local. x = 0, f(0) = – 1/9 (calculado en el apartado a))

Hay un máximo local en el punto $\left(0, \frac{-1}{9}\right)$

e) La información de los apartados anteriores se resume en



Para completar la representación, necesitamos situar la curva respecto de las asíntotas
Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2+1}{x^2-9} = (para\ x = -3'1) = \frac{(-3'1)^2+1}{(-3'1)^2-9} \infty = \frac{+}{+} \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+1}{x^2-9} = (para\ x = 3'1) = \frac{3'1^2+1}{3'1^2-9} \infty = \frac{+}{+} \infty = +\infty$$

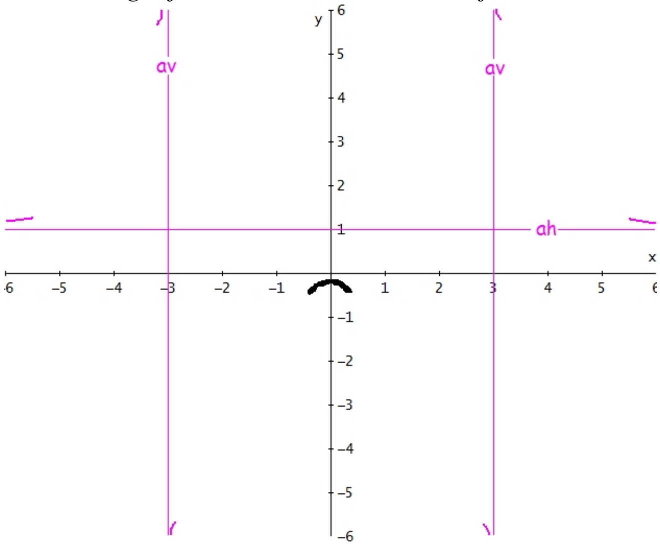
Asíntota horizontal

$$en \quad -\infty, \quad x=-1000 \quad \rightarrow \quad \frac{(-1000)^2+1}{(-1000)^2-9}=\frac{1000001}{999991}\approx 1'...$$

$$en \quad +\infty, \quad x=1000 \quad \rightarrow \quad \frac{1000^2+1}{1000^2-9}=\frac{1000001}{999991}\approx 1'...$$

Esto significa que la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal será

Añadiendo al gráfico anterior la nueva información:



Por lo tanto la representación gráfica de f(x) será: