OPCIÓN B

PROBLEMA 2. La siguiente función representa la valoración de una empresa en millones de euros en función del tiempo, t, a lo largo de los últimos 13 años:

$$f(t)=\begin{cases} 5-0{,}1\,t & 0\le t<5 \\ 4{,}5+0{,}05\,(t-5) & 5\le t<10 \\ 4{,}75+0{,}1\,(t-10)^2 & 10\le t\le 13 \end{cases}$$

Estudia analíticamente en el intervalo [0, 13]:

a) Si la función f(t) es o no continua, indicando en caso negativo los puntos de discontinuidad.
b) Instante t en el que la valoración de la empresa es máxima y dicha valoración máxima.
c) Instante t en el que la valoración de la empresa es mínima y dicha valoración mínima.

Solución:

a) La función f(t) está definida mediante tres ramas que son funciones polinómicas y, por tanto, funciones continuas en sus correspondientes intervalos abiertos de definición.
Estudiemos la continuidad en los puntos de cambio de definición,
t=5
f(5) = 4´5 + 0´05 (5 – 5) = 4´5

$$\lim_{t\to 5} f(t)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 5^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 5^-}(5-0'1t)=5-0'1\,.\,5=4'5 \\ \lim\limits_{t\to 5^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 5^+}(\,4'5+0'05(t-5)\,)=4'5+0'05(5-5)=4{,}5 \end{array}\right\}=4'5$$

Como los valores de la función y del límite coinciden, f(t) es continua en t = 5

t=10
f(10) = 4´75 + 0´1 (10 – 10)^2 = 4´75

$$\lim_{t\to 10} f(t)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 10^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 10^-}\left(\,4'5+0'05(t-5)\,\right)=4'5+0'05(10-5)=4'75 \\ \lim\limits_{t\to 10^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 10^+}\left(\,4'75+0'1(t-10)^2\,\right)=4'75+0'1(10-10)^2=4'75 \end{array}\right\}=4'75$$

Como los valores de la función y del límite coinciden, f(t) es continua en t = 10

La función está definida en el intervalo cerrado [0 , 13], entendemos que en t = 0 f(t) es continua por la derecha y en t = 13 lo es por la izquierda.
Finalmente, f(t) es continua en [0 , 13].

Para resolver los apartados b) y c) representamos gráficamente la función.
Las dos primeras ramas de la función son polinomios de primer grado, gráficamente líneas rectas, utilizaremos una tabla de valores para los valores inicial y final.
La tercera rama es un polinomio de segundo grado, gráficamente una parábola, utilizaremos tabal de valores y cálculo de su vértice.

recta

t	$5-0'1t$
0	5
5	4´5

recta

t	$4'5+0'05(t-5)$
5	4´5
10	4´75

parábola

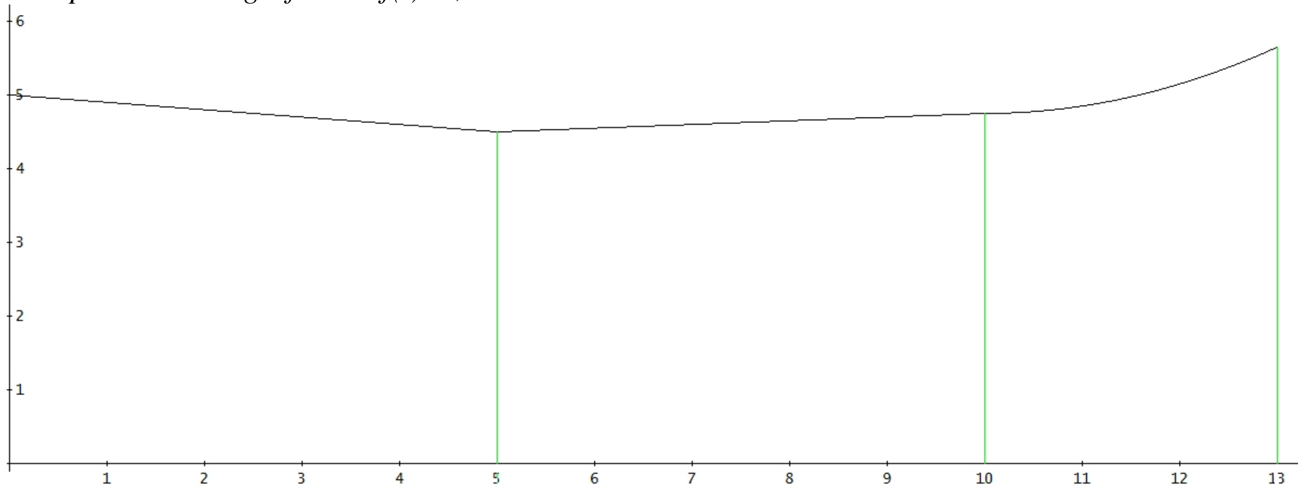
t	$4'75+0'1(t-10)^2$
10	4´75
13	$4'75+0'1(13-10)^2=5'65$

La mayoría de los cálculos están escritos directamente porque están realizados en el apartado anterior.
Obtengamos el vértice de la parábola,

$4´75 + 0´1(t - 10)^2 = 4´75 + 0´1 (t^2 - 20 t + 100) = 4´75 + 0´1 t^2 - 2 t + 10 = 0´1 t^2 - 2 t + 14´75$

Y el vértice de la parábola será, $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \, . \, 0´1} = \frac{2}{0´2} = 10 \quad \rightarrow \quad (10 \, , 4´75)$

La representación gráfica de f(t) es,



b) La valoración máxima se alcanza a los 13 años y es de 5´65 millones de euros.

c) La valoración mínima se alcanza a los 5 años y es de 4´5 millones de euros.