**PROBLEMA 2.** Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ . Calcula:

a) Ecuación de las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Máximos y mínimos locales.

*Solución:*
*Previamente obtengamos el dominio de esta función,*

$x^2-1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1.$ *Luego* Dom f(x) $=\Re-\{-1\,,\,1\}$

*a) Del cálculo del dominio deducimos que las posibles asíntotas verticales son* $x=-1$ *o* $x=1$,
*Veamos si* $x=-1$ *es a. v.*

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{(-1)^3}{(-1)^2-1}=\frac{-1}{1-1}=\frac{-1}{0}=\infty,\ \text{luego } x=-1 \text{ es una asíntota vertical}$$

*Veamos si* $x=1$ *es a. v.*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1^3}{1^2-1}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty,\ \text{luego } x=1 \text{ es una asíntota vertical}$$

*Calculemos la asíntota horizontal:*

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to -\infty}x=-\infty$$

*Análogamente,* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}x=+\infty$

*Por lo tanto esta función no tiene asíntota horizontal.*

*b) Estudiemos el signo de* $y'$,

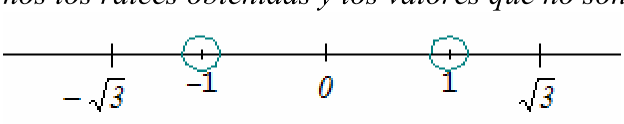
$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\,.\,2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

*Busquemos las raíces del numerador y del denominador,*

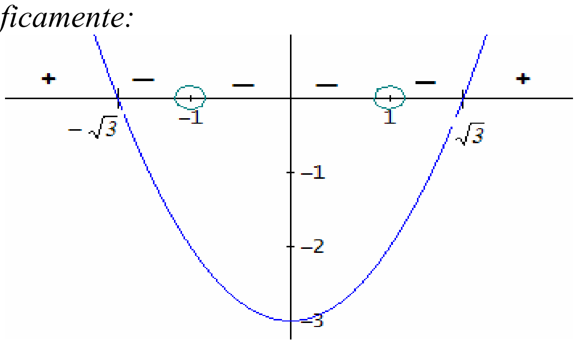
$$x^4-3x^2=0;\quad x^2(x^2-3)=0;\quad \begin{cases} x^2=0 \ \rightarrow\ x=0 \\ x^2-3=0 \ \rightarrow\ x^2=3 \ \rightarrow\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

$(x^2-1)^2=0;\quad x^2-1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm 1$

*Representamos los raíces obtenidas y los valores que no son del dominio en la recta real,*

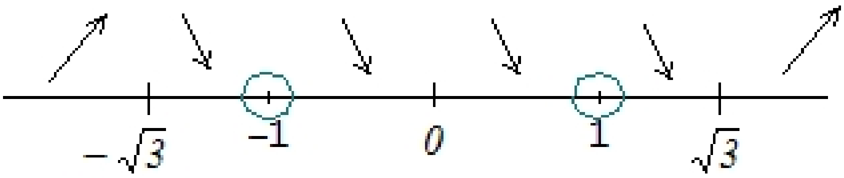



*El denominador de* $y'$ *está elevado al cuadrado, siempre será positivo, por lo que el signo de* $y'$ *sólo depende del numerador. El numerador es un producto,* $x^2\,(x^2-3)$. *Su primer factor,* $x^2$, *es positivo; por lo tanto el signo de* $y'$ *sólo depende de* $(x^2-3)$ *que es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* $x^2$ *positivo y raíces* $\pm\sqrt{3}$ .
*Gráficamente:*




*Finalmente:*
*f(x) es creciente en* $(-\infty\,,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}\,,+\infty)$
*f(x) es decreciente es* $(-\sqrt{3}\,,-1)\cup(-1\,,0)\cup(0\,,1)\cup(1\,,\sqrt{3})$

*c) Del estudio del apartado anterior y considerando el dominio de f(x)*




*Luego f(x) tiene un máximo local en* $x = -\sqrt{3}$ *y un mínimo local en* $x = \sqrt{3}$ .
*Calculemos las ordenadas de estos extremos:*

$$x = -\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad f(-\sqrt{3}) = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{3\left(-\sqrt{3}\right)}{3-1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad f(\sqrt{3}) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

*Finalmente, en* $\left(-\sqrt{3}\,,\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ *hay un máximo local y en* $\left(\sqrt{3}\,,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ *hay un mínimo local.*