PROBLEMA 1. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de la matriz C.
b) Obtén la matriz X que verifica $A\,X + B^t = C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

Solución:
a) Cálculo de la matriz inversa de C,

$$C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \qquad |\,C\,|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-2=-5\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, C^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de C:

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \text{cálculo de menores}:\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} \quad \text{adjuntos}:\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix} \quad \text{traspuesta}:\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Y finalmente:

$$C^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5}\end{pmatrix}$$

$$\text{Comprobación}:\ \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}+\frac{2}{5} & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Por lo que: $C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5}\end{pmatrix}$

b) ¿X? / $A\,X + B^t = C$,

Veamos si la matriz A tiene inversa, $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4-2=2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$

Multiplicando la expresión $A\,X + B^t = C$ *por* A^{-1} *por la izquierda,*
$A^{-1}\,(A\,X + B^t) = A^{-1}\,C$; *efectuando el paréntesis,*
$A^{-1}\,A\,X + A^{-1}\,B^t = A^{-1}\,C$;
$I\,X + A^{-1}\,B^t = A^{-1}\,C$;
$X + A^{-1}\,B^t = A^{-1}\,C$;
$X = A^{-1}\,C - A^{-1}\,B^t = A^{-1}\,(C - B^t)$
Necesitamos calcular A^{-1},

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix} \text{cálculo de menores}:\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \quad \text{adjuntos}:\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad \text{traspuesta}:\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Y, finalmente:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Procedamos al calculo de la matriz X:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$