PROBLEMA 2. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+3 & si \quad 0\le x<1 \\ x-1 & si \quad 1\le x\le 3 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo [0 , 3].
b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f(x).
c) Calcula el área de la región determinada por la gráfica de la función y las rectas x = 0, y = 0 y x = 3.

Solución:

a) f(x) es una función definida a trozos, cada trozo es un polinomio luego cada trozo es continuo; el problema de continuidad está en el punto de cambio de definición, es decir, para x = 1. Estudiemos la continuidad en x = 1:

1ª) f(1) = 1 – 1 = 0, luego ∃ f(1).

$$2^a)\quad \lim_{x\to 1} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-x^2-2x+3\right)=-1^2-2\,.\,1+3=-1-2+3=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=1-1=0 \end{array}\right\}=0\,,$$

$$3^a)\quad f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$$

Se cumplen las tres condiciones de continuidad, f(x) es continua en x = 1. Por lo tanto f(x) es continua en [0 , 3].

b) Para calcular los máximos y mínimos absolutos de f(x) representamos gráficamente esta función. Considerando que el primer trozo de f(x) es una parábola y el segundo una línea recta obtendremos una tabla de valores de la función y calcularemos el vértice de a parábola.

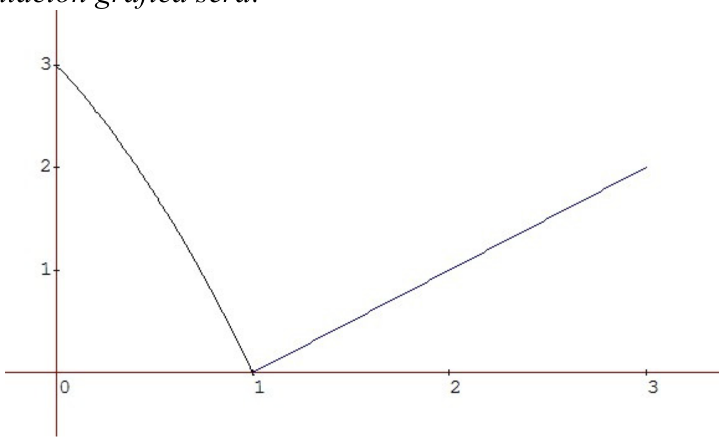
x	$f(x)$
0	$-0^2-2.0+3=3$
1	0
3	$3-1=2$

Vértice de la parábola $y=-x^2-2x+3$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$$

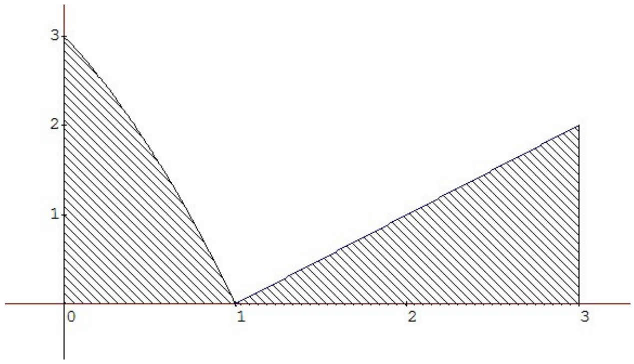
el vértice no es del dominio de la función f(x)

La representación gráfica será:



Por lo tanto, el máximo absoluto de f(x) es el punto (0 , 3) y el mínimo absoluto es el punto (1 , 0).

c) El área a calcular es:



Este área podemos calcularla mediante las siguientes integrales:

$$A=\int_0^1\left(-x^2-2x+3\right)dx+\int_1^3(x-1)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=$$

$$=\left(-\frac{1^3}{3}-1^2+3.1\right)+\left(\frac{3^2}{2}-3\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)+\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\left(-\frac{1}{3}+2\right)+\left(\frac{9-6}{2}\right)-\left(\frac{1-2}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{-1+6}{3}\right)+\frac{3}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{5}{3}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}+\frac{4}{2}=\frac{5}{3}+2=\frac{5+6}{3}=\frac{11}{3}$$

Finalmente este área mide $\frac{11}{3}u^2$