

BLOQUE B

PROBLEMA 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ que satisfacen la relación $A X - X A = B$.

Solución:

$A X - X A = B$, sustituyendo cada letra por su matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{operando}$$

$$\begin{pmatrix} x+2y & 2z \\ -x+3y & 3z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 2x \\ y-z & 2y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y & 2z-2x \\ -x+2y+z & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad de matrices da lugar al siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2y = 2 \\ 2z - 2x = -6 \\ -x + 2y + z = -1 \\ -2y = -2 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación obtenemos: $2y = 2$; $y = 1$ y de la 3ª, $-2y = -2$; $y = 1$. Como hemos obtenido el mismo valor, sabemos que $y = 1$. Sustituyendo el valor de y en las otras dos ecuaciones,

$$\begin{cases} 2z - 2x = -6 \\ -x + 2 + z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2z - 2x = -6 \\ -x + z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z - x = -3 \\ -x + z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + z = -3 \\ -x + z = -3 \end{cases}$$

Luego, sólo tenemos una ecuación: $-x + z = -3$; $z = x - 3$

Hemos obtenido que el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda - 3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$

Por lo que las matrices pedidas serán: $X(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R}$