OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}$, se pide

a) Su dominio y puntos de corte con os ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:
a) Cálculo del dominio,
Obtengamos los valores de x para los que el denominador es cero,

$$x^2-4x+3=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.3}}{2.1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{4-2}{2}=1 \end{array}\right.$$

Luego Dom f(x) = $\Re-\{1,3\}$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad y=\frac{-4}{3} \quad\rightarrow\quad \left(0,\frac{-4}{3}\right)$$

$$y=0 \quad\rightarrow\quad \frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}=0 \quad\rightarrow\quad -x^2+4x-4=0 \quad\rightarrow\quad x^2-4x+4=0$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.4}}{2.1}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{4}{2}=2 \quad\rightarrow\quad (2,0)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $\left(0,\dfrac{-4}{3}\right)$ *y* $(2,0)$

b) Asíntotas verticales
Según el estudio del dominio, las posibles asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = 3$
Veamos si $x = 1$ es a.v.

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}=\frac{-1^2+4.1-4}{1^2-4.1+3}=\frac{-1+4-4}{1-4+3}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \quad es\ a.v.$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}\overset{x=0'9}{=}\frac{-0'9^2+4.0'9-4}{0'9^2-4.0'9+3}\infty=\frac{-}{+}\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}\overset{x=1'1}{=}\frac{-1'1^2+4.1'1-4}{1'1^2-4.1'1+3}\infty=\frac{-}{-}\infty=+\infty$$

Veamos si $x = 3$ es a.v.

$$\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}=\frac{-3^2+4.3-4}{3^2-4.3+3}=\frac{-9+12-4}{9-12+3}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=3 \quad es\ a.v.$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\underset{x\to 1^-}{Lím}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}\overset{x=2'9}{=}\frac{-2'9^2+4.2'9-4}{2'9^2-4.2'9+3}\infty=\frac{-}{-}\infty=+\infty$$

$$\underset{x\to 1^+}{Lím}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}\overset{x=3'1}{=}\frac{-3'1^2+4.3'1-4}{3'1^2-4.3'1+3}\infty=\frac{-}{+}\infty=-\infty$$

Asíntotas horizontales,

$$\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{-x^2}{x^2}=\underset{x\to-\infty}{Lím}(-1)=-1$$

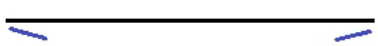
$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{-x^2}{x^2}=\underset{x\to+\infty}{Lím}(-1)=-1$$

Por lo tanto $y=-1$ *es asíntota horizontal.*

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$x=-1000 \quad\rightarrow\quad \frac{-(-1000)^2+4(-1000)-4}{(-1000)^2-4(-1000)+3}=\frac{-1004004}{1004003}=-1'000...$$

$$x=1000 \quad\rightarrow\quad \frac{-1000^2+4.1000-4}{1000^2-4.1000+3}=\frac{-996004}{996003}=-1'000...$$

Luego  ***y = - 1***

Para resolver los apartados c) y d) calculamos la derivada de la función,

$$f(x)=\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}$$

$$f'(x)=\frac{(-2x+4)(x^2-4x+3)-(-x^2+4x-4)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{2x-4}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & -4x & +3 \\
\otimes & & -2x & +4 \\
\hline
 & 4x^2 & -16x & +12 \\
-2x^3 & +8x^2 & -6x & \\
\hline
-2x^3 & +12x^2 & -22x & +12 \\
2x^3 & -12x^2 & +24x & -16 \\
\hline
 & & 2x & -4
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & -x^2 & +4x & -4 \\
\otimes & & 2x & -4 \\
\hline
 & 4x^2 & -16x & +16 \\
-2x^3 & +8x^2 & -8x & \\
\hline
-2x^3 & +12x^2 & -24x & +16
\end{array}$$

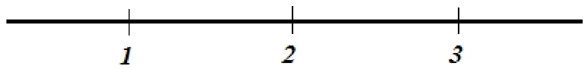
c) Monotonía.

Estudiamos el signo de f´(x). Como es un cociente de polinomios, buscamos las raíces del numerador y del denominador,

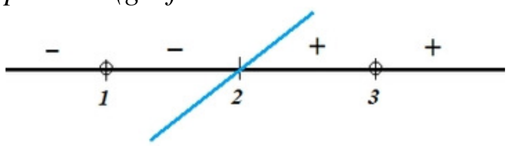
$2x-4=0 \;\rightarrow\; 2x=4 \;\rightarrow\; x=4/2 \;\rightarrow\; x=2$

$(x^2-4x+3)^2=0 \;\rightarrow\; x^2-4x+3=0 \;\rightarrow\;$ *(visto en apartado a))* $x=1\,,\,3$

Estudiamos el signo de f´(x) en los intervalos



Sabemos que Dom f(x) = $\Re-\{1,3\}$. *f´(x) es un cociente cuyo denominador es un polinomio al cuadrado, por lo que el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es un polinomio de 1º grado con coeficiente de x positivo (gráficamente una línea recta de pendiente positiva). Por lo tanto:*



f(x) es creciente en $(2,3)\cup(3,+\infty)$

y decreciente en $(-\infty,1)\cup(1,2)$

d) Del apartado anterior obtenemos que hay un extremo local en $x = 2$. Como a la izquierda de 2 $f(x)$ es decreciente y a la derecha creciente, en $x = 2$ hay un mínimo local.

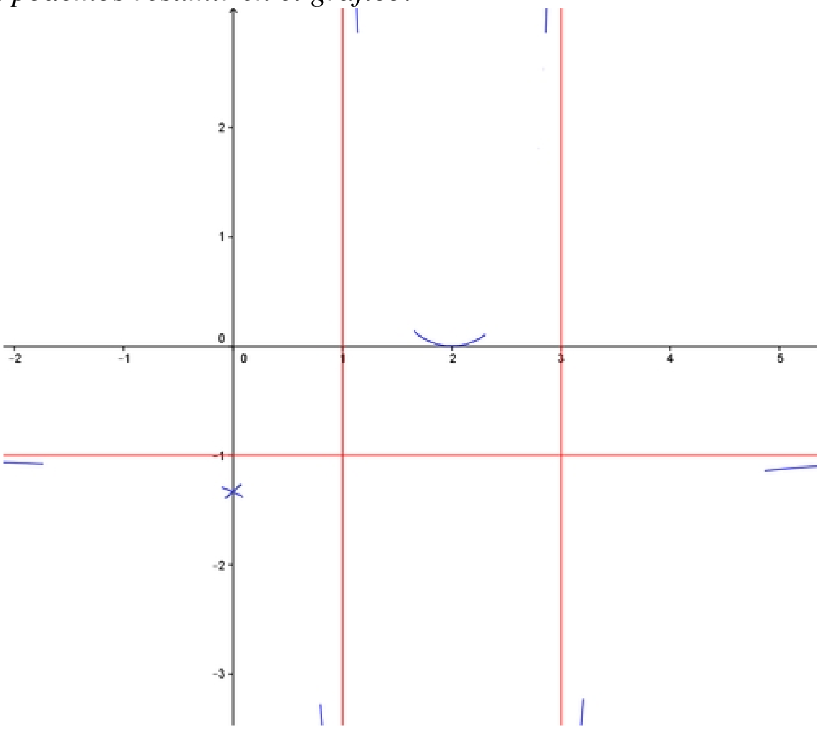
De lo calculado en el apartado a), para $x= 2$ $y = 0$. Por lo tanto $f(x)$ tiene un mínimo local en $(2 , 0)$.

e) La información de los apartados anteriores la podemos resumir en el gráfico:

Asíntotas verticales y horizontales en rojo ($x = 1$, $x = 3$ e $y = -1$)

Punto de corte (0, – 4/3)

Mínimo local (2 , 0)



Y la gráfica de la función $f(x)$ (en azul) será: