OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

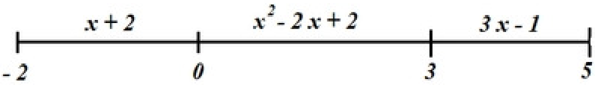
Problema 2. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad -2\le x<0 \\ x^2-2x+2 & si \quad 0\le x<3 \\ 3x-1 & si \quad 3\le x\le 5 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función en todos los puntos del intervalo [– 2 , 5].
b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f(x) en el intervalo [– 2 , 5/2]
c) Calcula $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) f(x) está definida en el intervalo [– 2 , 5] mediante tres trozos que son:



En cada uno de los trozos la definición de f(x) es un polinomio, por lo tanto en cada trozo la función es continua. Tenemos que estudiar la continuidad en los cambios de definición.

x = 0

1) $f(0) = 0^2 - 2\,.\,0 + 2 = 2$

2) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=0+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-2x+2)=0^2-2.0+2=2 \end{array}\right\}=2$$

3) $f(0)=2=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Luego f(x) es continua en x = 0

x = 3

1) $f(3) = 3\,.\,3 - 1 = 8$

2) $$\lim_{x\to 3} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-2x+2)=3^2-2.3+2=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x-1)=3.3-1=8 \end{array}\right\} 5\ne 8 \quad\rightarrow\quad \text{No existe el límite}$$

Luego f(x) no es continua en x = 3

Finalmente, f(x) es continua en [– 2 , 5] – { 3 } y en x = 3 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Para obtener los máximos y mínimos absolutos de f(x) en [– 2 , 5/2], representemos f(x) en este intervalo. Tengamos en cuenta que f(x) es continua en x = 0.

En [– 2 , 0), f(x) = x + 2, gráficamente una línea recta, para representarla basta con calcular dos puntos:

x = – 2, y = – 2 + 2 = 0
x = 0, y = 0 + 2 = 2

En [0 , 5/2], $f(x) = x^2 - 2x + 2$*, gráficamente una parábola.*

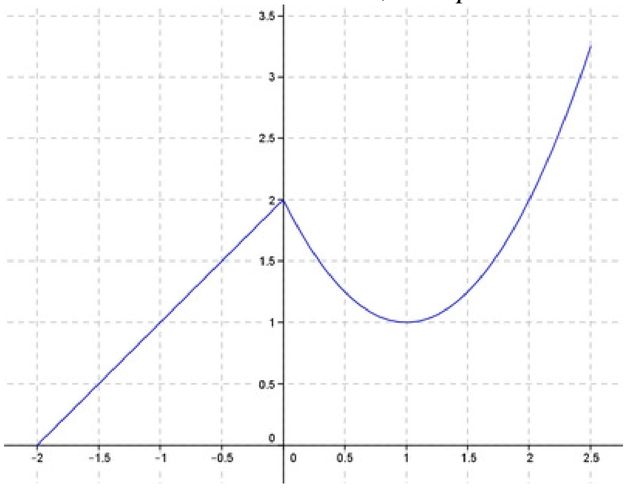
Calculemos su vértice, $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-2)}{2.1}=\dfrac{2}{2}=1 \;\rightarrow\; y=1^2-2.1+2=1-2+2=1 \;\rightarrow\;$ *Vértice (1,1)*

Como x = 1 ∈ [0 , 5/2], obtengamos los puntos de la parábola en los extremos del intervalo [0 , 5/2]

Para x = 0, y = 2 porque la función es continua en x = 0, (0 , 2)

Para $x=\dfrac{5}{2},\quad y=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2.\dfrac{5}{2}+2=\dfrac{25}{4}-5+2=\dfrac{25}{4}-3=\dfrac{13}{4}=3{'}25,\quad \left(\dfrac{5}{2},\dfrac{13}{4}\right)=(2{'}5,3{'}25)$

A partir de los cálculos anteriores, la representación gráfica de f(x) en el intervalo [0 , 5/2] será:



La gráfica nos indica que en el intervalo [0 , 5/2] la función f(x) tiene:

un mínimo absoluto en el punto (– 2 , 0) y

un máximo absoluto en $\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{4}\right)$

c)

$\int_1^2 f(x)\,dx$ = *como en el intervalo [1 , 2] f(x) =* $x^2 - 2x + 2$ $= \int_1^2 \left(x^2 - 2x + 2\right)dx =$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2.2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 2.1\right) = \left(\frac{8}{3} - 4 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 2\right) = \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{4}{3}$