OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)^2$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Máximos y mínimos locales.
d) El valor de la integral definida de $f(x)$ entre $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) f(x) es una función polinómica, por lo tanto **Dom f(x) =** $\Re$.

Corte con el eje OY

$$x = 0 \rightarrow f(0) = (0 - 1)^2 (0 + 2)^2 = 1 \cdot 4 = 4 \rightarrow (0, 4)$$

Corte con el eje OX

$$f(x) = 0 \rightarrow (x - 1)^2 (x + 2)^2 = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} (x-1)^2 = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0) \\ (x+2)^2 = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 0) \end{array} \right.$$

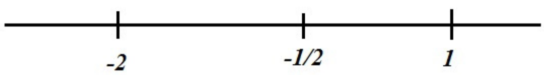
Por tanto, ***los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , 4), (1 , 0) y (– 2 , 0).***

Para resolver los apartados b) y c) hay que estudiar el signo de f´(x).

$$f'(x) = 2(x - 1)(x + 2)^2 + 2(x - 1)^2 (x + 2) = 2(x - 1)(x + 2)[x + 2 + x - 1] = 2(x - 1)(x + 2)[2x + 1]$$

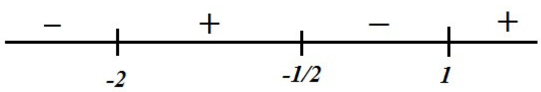
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2(x - 1)(x + 2)[2x + 1] = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ 2x + 1 = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

Hay que estudiar el signo de f´(x) en cada uno de los siguientes intervalos:



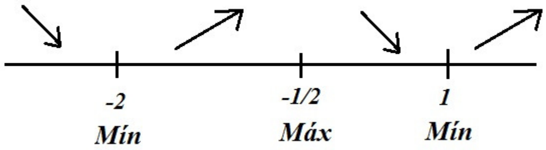
x	$f'(x) = 2(x-1)(x+2)(2x+1)$
-3	$2(-3-1)(-3+2)[2(-3)+1] = 2(-4)(-1)[-5] = -$
-1	$2(-1-1)(-1+2)[2(-1)+1] = 2(-2)(1)[-1] = +$
0	$2(-1)(2)(1) = -$
2	$2(2-1)(2+2)(2 \cdot 2+1) = 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = +$

Es decir:



b) Luego, f(x) es creciente en $\left(-2, \dfrac{-1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ *y es decreciente en* $(-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{-1}{2}, 1\right)$.

c) De lo estudiado anteriormente



Para $x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = 0$ *(calculado en a))*

Para $x = \dfrac{-1}{2} \;\rightarrow\; f\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \left(\dfrac{-1}{2} - 1\right)^2 \left(\dfrac{-1}{2} + 2\right)^2 = \left(\dfrac{-3}{2}\right)^2 \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}\dfrac{9}{4} = \dfrac{81}{16}$

Para $x = 1 \;\rightarrow\; f(1) = 0$ *(calculado en a))*

Por tanto, ***f(x) tiene un máximo local en*** $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{81}{16}\right)$ ***y mínimos locales en*** $(-2, 0)$ ***y*** $(1, 0)$***.***

d) Hay que calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left[(x-1)^2 (x+2)^2\right] dx$

Para resolver esta integral nos interesa tener la expresión polinómica de f(x),

$f(x) = (x-1)^2 (x+2)^2 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 4x + 4) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x^3 - 8x^2 - 8x + x^2 + 4x + 4 =$

$= x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

Entonces,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left[(x-1)^2 (x+2)^2\right] dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4\right) dx = \left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^3 - 2x^2 + 4x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 1 - 2 + 4\right) - \left(\frac{-1}{5} + \frac{1}{2} + 1 - 2 - 4\right) = \left(\frac{2+5}{10} + 1\right) - \left(\frac{-2+5}{10} - 5\right) =$$

$$= \frac{7}{10} + 1 - \frac{3}{10} + 5 = \frac{4}{10} + 6 = 6'4$$

Solución: $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \boldsymbol{6'4}$