OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Se dispone de 200 hectáreas de terreno en las que se desea cultivar patatas y zanahorias. Cada hectárea dedicada al cultivo de patatas necesita 12,5 litros de agua de riego al mes, mientras que cada una de zanahorias necesita 40 litros, disponiéndose mensualmente de un total de 5000 litros de agua para el riego. Por otra parte, las necesidades por hectárea de abono nitrogenado son de 20 kg para las patatas y de 30 kg para las zanahorias, disponiéndose de un total de 4500 kg de abono nitrogenado. Si la ganancia por hectárea sembrada de patatas es de 300€ y de 400€ la ganancia por cada hectárea de zanahorias, ¿qué cantidad de hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para maximizar la ganancia? ¿Cuál sería esta?

Solución:

Llamando: x = *hectáreas dedicadas a cultivar patatas*

y = *hectáreas dedicadas a cultivar zanahorias*

Los datos del problema los podemos resumir en la tabla:

	Hectáreas	Agua (l)	Abono (Kg)	Ganancia (€)
Patatas	x	$12'5\,x$	$20\,x$	$300\,x$
Zanahorias	y	$40\,y$	$30\,y$	$400\,y$
Restricciones	200	5000	4500	

Como las variables x *e* y *representan hectáreas de cultivo deben ser mayores o iguales a cero.*

La ganancia viene dada por la función: $z = 300\,x + 400\,y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 300\,x + 400\,y$$

$$s.a. \quad \begin{cases} x + y \le 200 \\ 12'5\,x + 40\,y \le 5000 \\ 20\,x + 30\,y \le 4500 \\ x,\, y \ge 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a) \quad x + y \le 200$

$x + y = 200$

x	y
0	200
200	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \le 200$ Sí

$(b) \quad 12'5x + 40y \le 5000$

$12'5x + 40y = 5000$

x	y
0	$\frac{5000}{40} = 125$
$\frac{5000}{12'5} = 400$	0

¿(0,0) cumple?

$12'5\,.\,0 + 40\,.\,0 \le 5000$

$0 \le 5000$ Sí

$(c) \quad 20x + 30y \le 4500$

$20x + 30y = 4500$

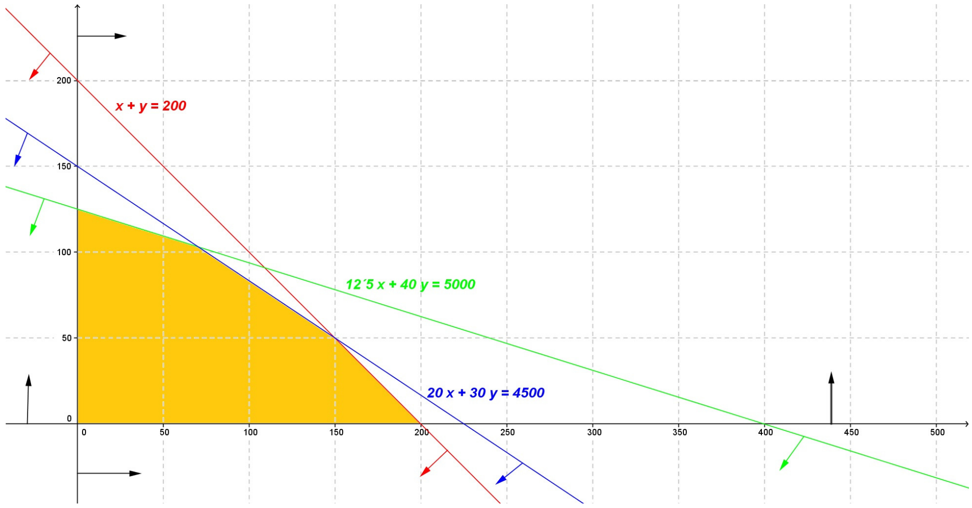
x	y
0	$\frac{4500}{30} = 150$
$\frac{4500}{20} = 225$	0

¿(0,0) cumple?

$20\,.\,0 + 30\,.\,0 \le 4500$

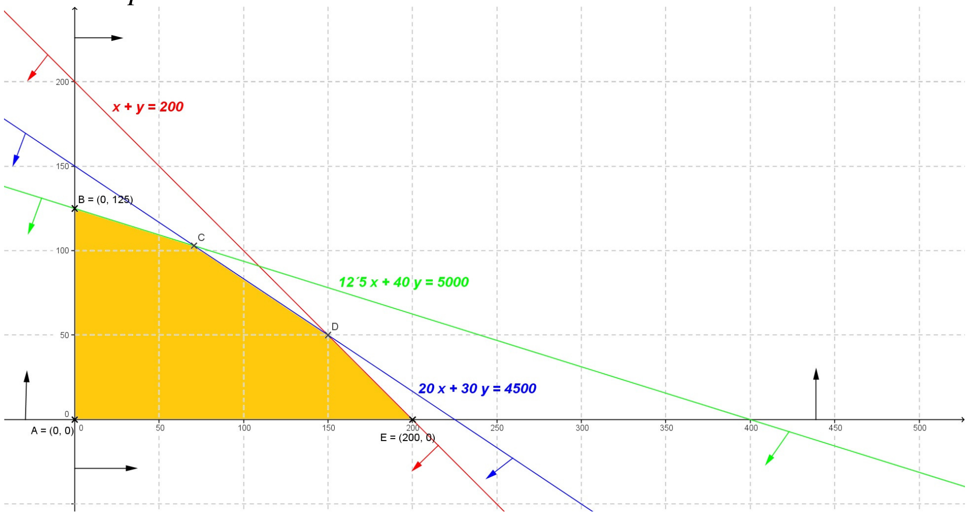
$0 \le 4500$ Sí

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región factible son A (0, 0), B (0 , 125), C, D y E (200 , 0). Los vértices A, B y E los conocemos directamente de la representación gráfica; los vértices C y D los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.



Punto C, corte entre (b) y (c):

$$\begin{cases} 12'5x + 40y = 5000 \\ 20x + 30y = 4500 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1^a\, x3 \\ 2^a\, x(-4) \end{matrix} \begin{cases} 37'5x + 120y = 15000 \\ -80x - 120y = -18000 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-42'5\,x = -3000 \rightarrow x = \dfrac{-3000}{-42'5} = \dfrac{1200}{17} \cong 70'5882$

sustituyendo el valor de x en la 2^a *ecuación:*

$$20 \cdot \frac{1200}{17} + 30y = 4500 \rightarrow \frac{24000}{17} + 30y = 4500 \rightarrow 30y = 4500 - \frac{24000}{17}$$

$$\rightarrow 30y = \frac{52500}{17} \rightarrow y = \frac{\frac{52500}{17}}{30} = \frac{1750}{17} \cong 102'9412$$

Luego C (70´5882 , 102´9412)

Punto D, corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 20x + 30y = 4500 \end{cases}$$

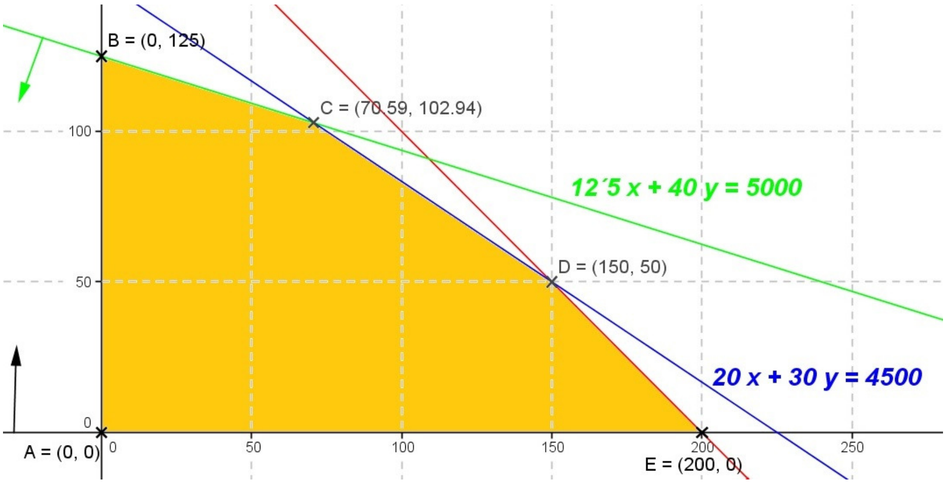
De la 1^a *ecuación:* $y = 200 - x$, *sustituyendo el valor de y en la* 2^a *ecuación:*

$20\,x + 30\,(200 - x) = 4500$; $20\,x + 6000 - 30\,x = 4500$; $-10\,x = 4500 - 6000$

$-10\,x = -1500 \rightarrow x = \dfrac{-1500}{-10} = 150$

Y, finalmente, $y = 200 - 150 = 50$. *Por tanto, D (150 , 50)*

Los vértices de la región factible son: A (0, 0), B (0 , 125) , C (70´5882 , 102´9412), D (150 , 50) y E (200 , 0).



El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*z = 300 x + 400 y*	
0 , 0	*300 . 0 + 400 . 0 = 0*	
0 , 125	*300 . 0 + 400 . 125 = 50000*	
70´5882 , 102´9412	*300 . 70´5882 + 400 . 102´9412 = 62352´94*	
150 , 50	*300 . 150 + 400 . 50 = 65000*	*Máximo*
200 , 0	*300 . 200 + 400 . 0 = 60000*	

El máximo se alcanza en el punto (150 , 50)

Por tanto, conviene dedicar 150 hectáreas al cultivo de patatas y 50 hectáreas al de zanahorias. De esta forma la ganancia sería de 65000€.