Problema 2. Calcula:

a) Todas las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x)=\dfrac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$.

c) Los máximos y mínimos de la función $g(x)$ del apartado anterior.

Solución:

a) Asíntotas verticales.

Primero resolvemos: $x^3 - 9x = 0 \;\rightarrow\; x\left(x^2-9\right)=0 \begin{cases} x=0 \\ x^2-9=0 \;\rightarrow\; x^2=9 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \end{cases}$

Por tanto, hay tres posible asíntotas verticales: $x = -3$, $x = 0$ *y* $x = 3$.

Veamos si lo son. El límite de la función para cada valor de x *debe dar infinito.*

$x = -3$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\frac{2(-3)^3+2(-3)-1}{(-3)^3-9(-3)}=\frac{-54-6-1}{-27+27}=\frac{-61}{0}=\infty,\ \textit{por tanto } x=-3 \textit{ es a.v.}$$

$x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\frac{2\,.\,0^3+2\,.\,0-1}{0^3-9\,.\,0}=\frac{-1}{0}=\infty,\ \textit{por tanto } x=0 \textit{ es a.v.}$$

$x = 3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\frac{2\,.\,3^3+2\,.\,3-1}{3^3-9\,.\,3}=\frac{54+6-1}{27-27}=\frac{59}{0}=\infty,\ \textit{por tanto } x=3 \textit{ es a.v.}$$

Asíntota horizontal

Debemos calcular los siguientes límites,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3}{x^3}=\lim_{x\to -\infty}2=2 \\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3}{x^3}=\lim_{x\to +\infty}2=2 \end{array}\right\}\ \textit{por tanto, } y=2 \textit{ es la a.h.}$$

Luego, ***f(x) tiene tres asíntotas verticales*** $\boldsymbol{x = -3}$, $\boldsymbol{x = 0}$ ***y*** $\boldsymbol{x = 3}$ ***y una asíntota horizontal*** $\boldsymbol{y = 2}$.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$.

En primer lugar, como $g(x)$ *es una función polinómica* $Dom\ g(x) = \Re$

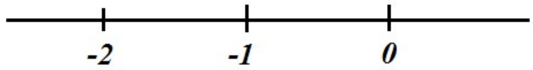
Debemos estudiar el signo de $g'(x)$

$g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x$

$$4x^3 + 12x^2 + 8x = 0;\quad 4x\,(x^2 + 3x + 2) = 0 \begin{cases} 4x=0 \;\rightarrow\; x=0 \\ x^2+3x+2=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1}= \end{cases}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-3+1}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \\ x_2=\dfrac{-3-1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

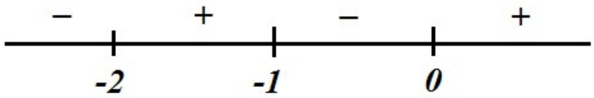
Hay que estudiar el signo de $g'(x)$ en los siguientes intervalos



Como $g'(x)$ es un polinomio de tercer grado con tres raíces reales, calculando el signo de $g'(x)$ en uno de los intervalos los demás salen de forma alterna,

$x = 1 \rightarrow g'(1) = 4 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 4 + 12 + 8 = 24 > 0$

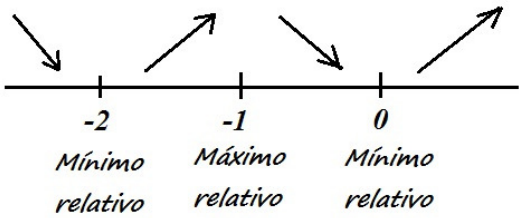
Por tanto:



Luego ***g(x) es creciente en*** $(-2, -1) \cup (0, +\infty)$ ***y decreciente en*** $(-\infty, -2) \cup (-1, 0)$.

c) Máximos y mínimos de $g(x)$

Del estudio realizado en el apartado anterior obtenemos:



$x = -2 \rightarrow g(-2) = (-2)^4 + 4 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 - 8 = 16 - 32 + 16 - 8 = -8$

$x = -1 \rightarrow g(-1) = (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 8 = 1 - 4 + 4 - 8 = -7$

$x = 0 \rightarrow g(0) = 0^4 + 4 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 - 8 = -8$

Es decir, ***g(x) tiene un máximo relativo en (– 1 , – 7) y mínimos relativos en (– 2 , – 8) y (0 , – 8).***