Problema 2. El rendimiento de un estudiante durante las primeras 6 horas de estudio viene dado (en una escala de 0 a 100) por la función:

$$R(t) = \frac{700\,t}{4t^2+9}$$

donde t es el número de horas transcurrido.

a) Calcula el rendimiento a las 3 horas de estudio.

b) Determina la evolución del rendimiento durante la primeras 6 horas de estudio (cuándo aumenta y cuándo disminuye). ¿Cuál es el rendimiento máximo?

c) Una vez alcanzado el rendimiento máximo, ¿en qué momento el rendimiento es igual a 35?

Solución:

Por definición, $R(t) = \frac{700\,t}{4t^2+9} \quad 0 \le t \le 6$

a) Rendimiento a las 3 horas de estudio.

Hay que calcular R(3), $R(3) = \frac{700\,.\,3}{4\,.\,3^2+9} = \frac{2100}{36+9} = \frac{2100}{45} = 46{\acute{}}6667$

Luego, ***a las tres horas de estudio el rendimiento es de 46´6667***.

b) Para determinar la evolución del rendimiento durante las seis primeras horas de estudio, calculamos la monotonía de la función R(t)

En primer lugar, Dom R(t) = [0 , 6] (por definición de R(t) y porque $4\,t^2 + 9 \ge 0$ *siempre)*

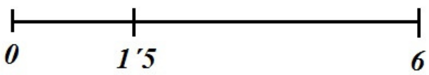
$$R'(t) = \frac{700(4t^2+9) - 700\,t\,.\,8\,t}{(4t^2+9)^2} = \frac{2800\,t^2 + 6300 - 5600\,t^2}{(4t^2+9)^2} = \frac{-2800\,t^2+6300}{(4t^2+9)^2}$$

Signo de R´(t), como el denominador está elevado al cuadrado siempre es positivo, por lo que el signo de R´(t) sólo depende del numerador.

$$-2800\,t^2 + 6300 = 0 \quad \rightarrow \quad -2800\,t^2 = -6300 \quad \rightarrow \quad t^2 = \frac{-6300}{-2800} = 2{\acute{}}25 \quad \rightarrow \quad t = \pm\sqrt{2{\acute{}}25} = \pm 1{\acute{}}5$$

Como Dom R(t) = [0 , 6] $\rightarrow$ *t = 1´5*

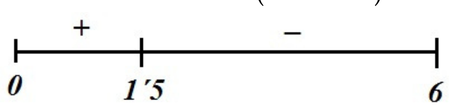
Hay que estudiar el signo de R´(t) en los intervalos:



Para t = 1 $\rightarrow$ $R'(1) = \frac{-2800\,.\,1^2 + 6300}{(4\,.\,1^2+9)^2} = \frac{3500}{169} > 0$

Para t = 2 $\rightarrow$ $R'(2) = \frac{-2800\,.\,2^2 + 6300}{(4\,.\,2^2+9)^2} = \frac{-11200+6300}{25^2} = \frac{-4900}{625} < 0$

Luego:



Es decir, R(t) es creciente en el intervalo (0 , 1´5) y decreciente en (1´5 , 6). En t = 1´5 R(t) tiene un máximo relativo, además como R(t) a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente es el máximo absoluto de R(t).

Para t = 1´5 $\rightarrow$ $R(1{\acute{}}5) = \frac{700\,.\,1{\acute{}}5}{4\,.\,1{\acute{}}5^2+9} = \frac{1050}{18} = 58{\acute{}}3333$

Para finalizar falta por calcular R(t) en los extremos del dominio,

Para $t = 0 \ \rightarrow \ R(0) = \dfrac{700.0}{4.0^2+9} = \dfrac{0}{9} = 0$

Para $t = 6 \ \rightarrow \ R(6) = \dfrac{700.6}{4.6^2+9} = \dfrac{4200}{153} = 27'4501$

Solución: durante las seis primeras horas de estudio el rendimiento aumenta desde el principio (R = 0) hasta hora y media después (R = 58´3333) y a partir de este momento disminuye (al final R = 27´4501).

El rendimiento máximo es de 58´3333 que se alcanza a la hora y media de empezar a estudiar.

c) Una vez alcanzado el rendimiento máximo, ¿en qué momento el rendimiento es igual a 35?

Debemos resolver la siguiente ecuación: $\dfrac{700\,t}{4t^2+9} = 35$ *(y la solución que buscamos debe ser t > 1´5)*

Resolviendo,

$$700\,t = 35\left(4t^2+9\right)$$

$$700\,t = 140t^2 + 315$$

$$140t^2 - 700\,t + 315 = 0$$

$$t = \frac{-(-700) \pm \sqrt{(-700)^2 - 4\,.\,140\,.\,315}}{2\,.\,140} = \frac{700 \pm \sqrt{490000-176400}}{280} = \frac{700 \pm \sqrt{313600}}{280} = \frac{700 \pm 560}{280} =$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} t_1 = \dfrac{700+560}{280} = \dfrac{1260}{280} = 4'5 \\ t_2 = \dfrac{700-560}{280} = \dfrac{140}{280} = 0'5 \quad \times \end{array} \right.$$

Es decir, una vez alcanzado el rendimiento máximo, el rendimiento es igual a 35 a las cuatro horas y media de empezar a estudiar.