OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$, se pide:

a) Su dominio y sus puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Los máximos y mínimos locales.
e) La representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Su dominio y sus puntos de corte con los ejes coordenados.

$4-x=0 \;\rightarrow\; x=4 \;\rightarrow\; Dom\, f(x)=\Re \sim \{4\}$

Puntos de corte:

$$x=0 \;\rightarrow\; y=\frac{0}{4-0}=0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$$

$$y=0 \;\rightarrow\; 0=\frac{x^2}{4-x} \;\rightarrow\; x^2=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$$

Dom f(x) = $\boldsymbol{\Re \sim \{4\}}$ ***y el punto de corte con los ejes coordenados es: (0 , 0).***

b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

Asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \text{ no tiene asíntota horizontal}$$

Asíntota vertical.

La posible A.V. es x = 4, comprobémoslo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2}{4-x}=\frac{4^2}{4-4}=\frac{16}{0}=\infty, \text{ por tanto } x=4 \text{ es asíntota vertical}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2}{4-x}\overset{x=3'9}{=}\frac{+}{+}\infty=+\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2}{4-x}\overset{x=4'1}{=}\frac{+}{-}\infty=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La asíntota vertical de f(x) es x = 4 y no tiene asíntota horizontal.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Debemos estudiar el signo de f´(x). Calculemos f´(x),

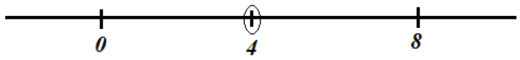
$$f'(x)=\frac{2x(4-x)-x^2(-1)}{(4-x)^2}=\frac{8x-2x^2+x^2}{(4-x)^2}=\frac{8x-x^2}{(4-x)^2}$$

Calculamos las raíces del numerador y denominador de f´(x),

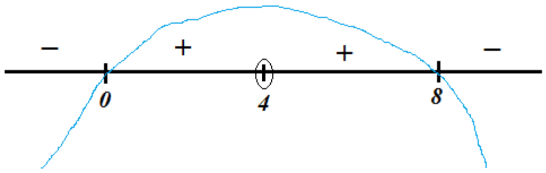
$$8x - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x(8-x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 8 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 8 \end{cases}$$

$$(4-x)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 4 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

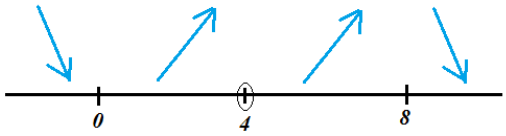
Representamos en la recta real los valores de x obtenidos y consideramos que x = 4 ∉ Dom f(x)



En f´(x) el denominador está al cuadrado, siempre es positivo, luego el signo de f´(x) sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo [∩] y raíces 0 y 8, por tanto,



La monotonía de f(x) es:



Finalmente, f(x) es creciente en (0 , 4) ∪ (4 , 8) y es decreciente en (– ∞, 0) ∪ (8 , +∞).

d) Los máximos y mínimos locales.

De lo estudiado en el apartado anterior sabemos que hay extremos locales en x = 0 (mínimo) y en x = 8 (máximo).

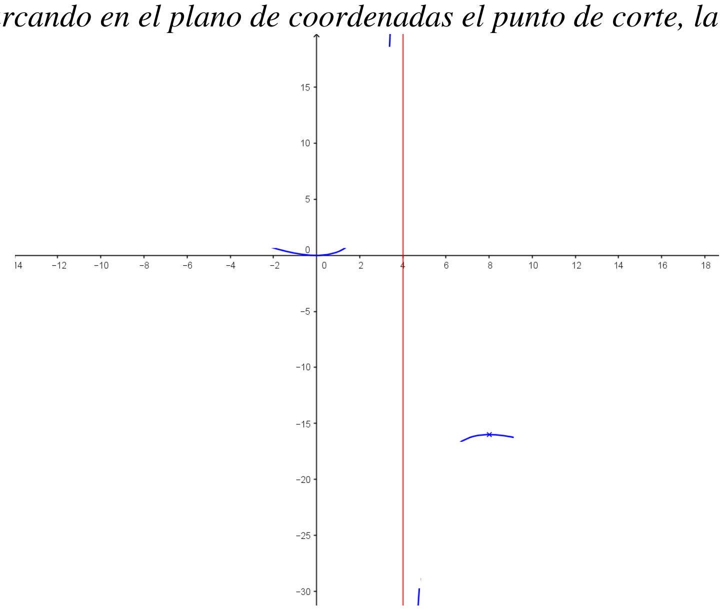
Para $x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$ *(del apartado a))*

Para $x = 8 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{8^2}{4-8} = \dfrac{64}{-4} = -16$

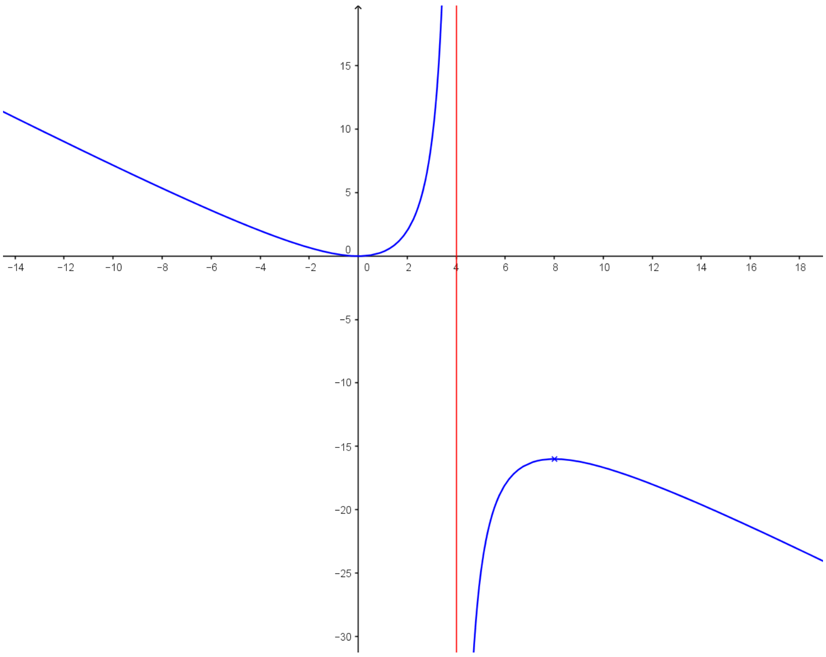
Por tanto, f(x) tiene un mínimo local en (0 , 0) y un máximo local en (8 , – 16).

e) La representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Marcando en el plano de coordenadas el punto de corte, la asíntota y los extremos locales:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento la representación gráfica de f(x) será:



15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
−14
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18