Problema 2. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Máximos y mínimos locales.
d) Representación gráfica.
e) A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, razona en qué puntos la función $g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + x - 2$ tiene un máximo y mínimo local.

Solución:

a) Dominio y puntos de corte.

f(x) es una función polinómica, por tanto $Dom\, f(x) = \Re$.

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^3 - 2 \,.\, 0^2 + 0 = 0 \rightarrow$ *punto* $(0, 0)$

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0$

$x(x^2 - 2x + 1) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{punto } (0,0) \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\,.\,1\,.\,1}}{2\,.\,1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \rightarrow \text{punto } (1,0) \end{cases}$$

Luego, ***los puntos de corte con los ejes coordenados son (0 , 0) y (1 , 0).***

b) Monotonía.

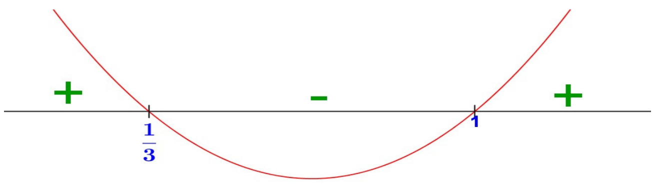
Debemos estudiar el signo de $f'(x)$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\,.\,3\,.\,1}}{2\,.\,3} == \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+2}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

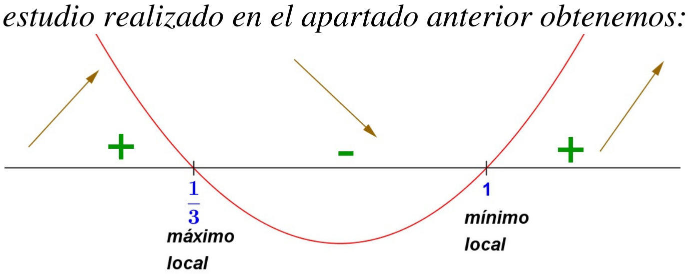
$3x^2 - 4x + 1 = 0$ *es un polinomio de segundo grado con coeficiente de* x^2 *positivo y raíces* 1 *y* $1/3$*, por tanto:*



Luego ***f(x) es creciente en*** $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

c) Máximos y mínimos locales

Del estudio realizado en el apartado anterior obtenemos:



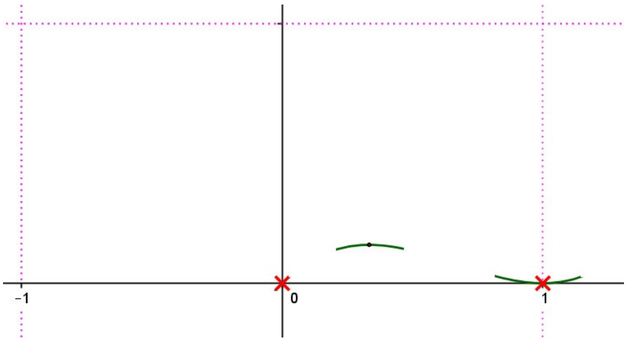
$$x = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1-6+9}{27} = \frac{4}{27}$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

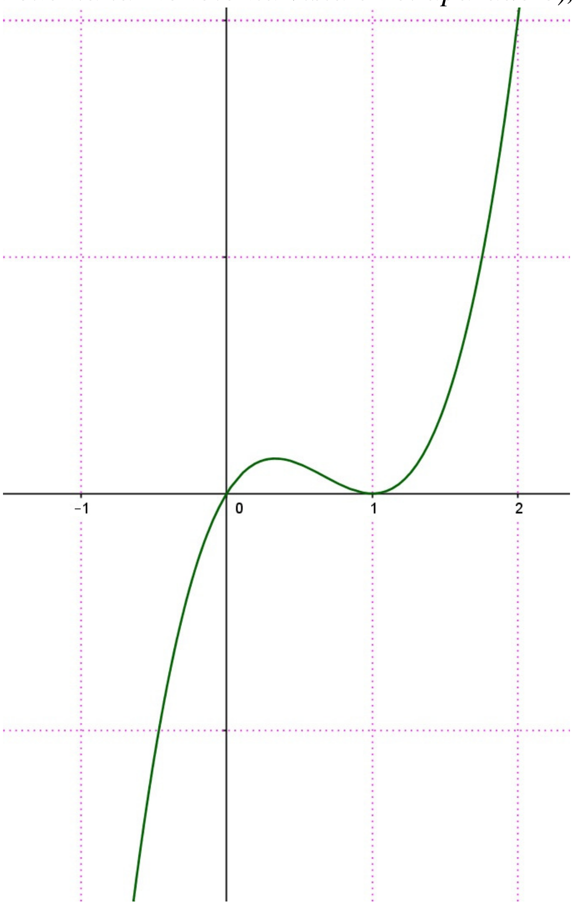
Es decir, ***f(x) tiene un máximo local en*** $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ ***y un mínimo local en (1 , 0).***

d) Representación gráfica de f(x)

Situando en los ejes coordenados los puntos de corte y los extremos relativos obtenidos en los apartados anteriores,



Teniendo en cuenta la monotonía vista en el aparado c), la representación gráfica será:



e) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

$g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + x - 2$

Transformemos las expresiones de f(x) y g(x) para ver la relación que hay entre ellas.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$

$g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + x - 2 = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + (x-2) =$

$= (x-2)\,[(x-2)^2 - 2(x-2) + 1] = (x-2)\,[(x-2) - 1]^2 = (x-2)(x-3)^2$

Comparando las expresiones de f(x) y g(x) se verifica: $g(x) = f(x-2)$

Es decir, la gráfica de g(x) es la de f(x) desplazada 2 unidades a la derecha.

Por ello, como f(x) tiene un mínimo local para $x = 1$, *g(x) lo tiene para* $x = 1 + 2 = 3$ *y como f(x) tiene un máximo local para* $x = \frac{1}{3}$, *g(x) lo tiene para* $x = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$.

Finalmente, ***g(x) tiene un máximo local en*** $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$ ***y un mínimo local en (3 , 0).***