Problema 2. Un analista pronostica que el beneficio *B(x)* en miles de euros de cierto fondo de inversión, donde *x* representa la cantidad invertida en miles de euros, viene dado por la siguiente expresión:

$$B(x)=\begin{cases} -0'01\,x^2+0'09\,x+0'1 & 0<x\le 8 \\ 1'26\dfrac{x}{x^2-1}+0'02 & x>8 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de *B(x)*.
b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) ¿Qué capital, en euros, conviene invertir en este fondo para maximizar el beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo?
d) Si se invierte un capital muy elevado, ¿cuál sería como mínimo su beneficio? ¿Por qué?

Solución:

a) Continuidad de B(x).

B(x) es una función definida a trozos. Estudiemos la continuidad de la función en cada trozo y en el punto de cambio de definición.

Para $0 < x < 8$, $B(x) = -0´01\,x^2 + 0´09\,x + 0´1$ *que es un polinomio, por tanto continua.*

Para $x > 8$, $B(x)=1'26\,\dfrac{x}{x^2-1}+0'02$ *, los problemas para continuidad se presentan en las raíces del denominador,* $x^2 - 1$*, calculémoslas:*

$$x^2-1=0 \;\;\rightarrow\;\; x^2=1 \;\;\rightarrow\;\; x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Pero como esta definición de B(x) es para x > 8, el denominador no se anula, por tanto B(x) es continua.

Estudiemos la continuidad en x = 8,

1) $B(8) = -0´01\,.\,8^2 + 0´09\,.\,8 + 0´1 = 0´18$, *existe B(8)*

2) $\underset{x\to 8}{Lím}\,B(x) =$ *(como a la izquierda y derecha de 8 B(x) tiene dos definiciones diferentes, calculamos*

$$\text{límites laterales)}=\begin{cases} \underset{x\to 8^-}{Lím}\,B(x)=\underset{x\to 8^-}{Lím}\,\left(-0'01\,x^2+0'09\,x+0'1\right)=-0'01\cdot 8^2+0'09\cdot 8+0'1=0'18 \\ \underset{x\to 8^+}{Lím}\,B(x)=\underset{x\to 8^+}{Lím}\,\left(1'26\dfrac{x}{x^2-1}+0'02\right)=1'26\dfrac{8}{8^2-1}+0'02=1'26\dfrac{8}{63}+0'02=0'18 \end{cases}$$

como los límites laterales coinciden, $\underset{x\to 8}{Lím}\,B(x)=0'18$*, existe el límite.*

3) $\underset{x\to 8}{Lím}\,B(x)=0'18=B(8)$

Se cumplen las tres condiciones, B(x) es continua en x = 8

Luego, ***B(x) es continua en su dominio de definición, es decir, en (0 , + ∞).***

b) Monotonía. Por se función definida a trozos estudiemos la monotonía en cada trozo.

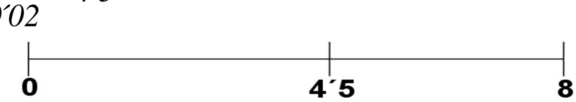
Para $0 < x < 8$

$y = -0´01\,x^2 + 0´09\,x + 0´1$, *estudiemos el signo de* $y´$

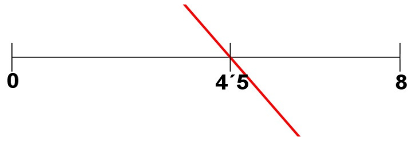
$y´ = -0´02\,x + 0´09$

$$-0´02\,x + 0´09 = 0 \;\;\rightarrow\;\; -0´02\,x = -0´09 \;\;\rightarrow\;\; x=\frac{-0'09}{-0'02}=4'5$$

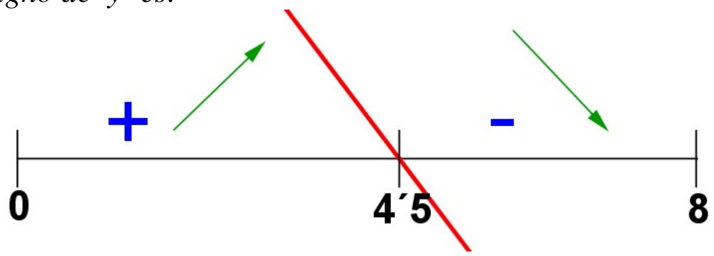
Hay que estudiar el signo en los siguientes intervalos:



y´ es una línea recta de pendiente negativa y que pasa por $x = 4´5$:



El signo de y´ es:



Para $x > 8$

$$y = 1'26\,\frac{x}{x^2-1} + 0'02$$

$$y' = 1'26\,\frac{1\left(x^2-1\right) - x \cdot 2\,x}{\left(x^2-1\right)^2} = 1'26\,\frac{x^2 - 1 - 2\,x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = 1'26\,\frac{-\,x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

Estudiemos el signo de y´. 1´26 es positivo. Veamos la fracción, como el denominador está elevado al cuadrado (es positivo) el signo de y´ sólo depende del numerador, $-x^2 - 1 = -\left(x^2+1\right)$; como $x^2 + 1$ siempre es positivo, $-\left(x^2+1\right)$ es negativo, por tanto y´ es negativa.
Para $x > 8$, la función es decreciente.

Para $x = 8$

$$y'(8) = \begin{cases} y'(8^-) = -0'02 \cdot 8 + 0'09 = -0'07 \\ y'(8^+) = 1'26\,\dfrac{-\,8^2-1}{\left(8^2-1\right)^2} = 0'020634... \end{cases} \quad \rightarrow \quad No\ existe \quad y'(8)$$

Finalmente, como B(x) es continua,

B(x) es creciente en $(\,0\,,\,4´5\,)$ y decreciente en $(\,4´5\,,\,8\,) \cup (\,8\,,\,+\infty)$.

c) Del estudio realizado en el apartado anterior se deduce que el máximo relativo se alcanza para $x = 4´5$.
$x = 4´5$, $B(4´5) = -\,0´01\,.\ 4´5^2 + 0´09\,.\ 4´5 + 0´1 = 0´3025$
Como a la derecha de 4´5 la función es creciente y a la derecha decreciente el máximo relativo es el absoluto.
Por tanto, hay que invertir 4´5 miles de euros se obtendría un beneficio de 0´´3025 miles de euros.

Es decir, hay que invertir 4500 euros y obtendríamos un beneficio de 302´50 euros.

d) Cuando se invierte un capital muy elevado el beneficio lo podemos obtener calculando el siguiente límite:

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\, B(x) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1'26\,\frac{x}{x^2-1} + 0'02\right) \overset{*}{=}$$

$$calculemos \quad \underset{x\to+\infty}{Lím}\,\frac{x}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\,\frac{x}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{Lím}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\overset{*}{=} 1'26 \cdot 0 + 0'02 = 0'02$$

Podemos afirmar que el mínimo beneficio, cuando se invierte un capital muy elevado, es 0´02 miles de euros (20 euros) porque de lo estudiado en los apartados anteriores sabemos que a partir de $x = 8$ la función es decreciente.

*Luego, **si se invierte un capital muy elevado el beneficio será, como mínimo, de 20 euros.***