OPCIÓN A

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio y puntos de corte.
Dominio:

$$(x-2)^2=0 \;\rightarrow\; x-2=0 \;\rightarrow\; x=2, \quad \text{por tanto} \quad Dom\, f(x)=\Re \sim \{\,2\,\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$$x=0 \;\rightarrow\; y=\frac{0-1}{(0-2)^2}=\frac{-1}{4} \quad\rightarrow\quad \left(0\,,\frac{-1}{4}\right)$$

$$y=0 \;\rightarrow\; 0=\frac{x-1}{(x-2)^2} \;\rightarrow\; x-1=0 \;\rightarrow\; x=1 \;\rightarrow\; (1\,,0)$$

Luego, ***los puntos de corte con los ejes coordenados son*** $\left(0\,,\dfrac{-1}{4}\right)$ ***y*** $(\,1\,,0\,)$.

b) Asíntota horizontal:

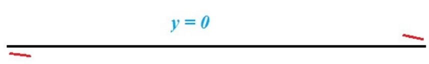
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{(x-2)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2-4x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x-2)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Por tanto, ***y = 0*** ***es la asíntota horizontal.***

Para facilitar la representación gráfica de la función, situemos la curva respecto de la asíntota:

$$\left.\begin{array}{l} En\;\; -\infty,\quad x=-1000 \;\rightarrow\; y=\dfrac{-1000-1}{(-1000-2)^2}=-0'000997... \\[2ex] En\;\; +\infty,\quad x=1000 \;\rightarrow\; y=\dfrac{1000-1}{(1000-2)^2}=0'001003... \end{array}\right\}\rightarrow$$

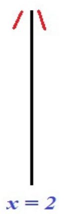


Asíntota vertical. La posible asíntota vertical es x = 2, veamoslo:

$$\lim_{x\to2}\frac{x-1}{(x-2)^2}=\frac{2-1}{(2-2)^2}=\frac{1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{x=2}\;\; \textbf{es asíntota vertical.}$$

Para facilitar la representación gráfica de la función, situemos la curva respecto de la asíntota:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\overset{x=1'9}{=}\dfrac{1'9-1}{(1'9-2)^2}\infty=\dfrac{+}{+}\infty=+\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\overset{x=2'1}{=}\dfrac{2'1-1}{(2'1-2)^2}\infty=\dfrac{+}{+}\infty=+\infty \end{array}\right\}\rightarrow$$



c) Monotonía.

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{1.(x-2)^2-(x-1)\,2\,(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{1.(x-2)-(x-1)\,2}{(x-2)^3}=\frac{x-2-2x+2}{(x-2)^3}=\frac{-x}{(x-2)^3}$$

Para estudiar el signo de $f'(x)$ calculemos las raíces del numerador y denominador:

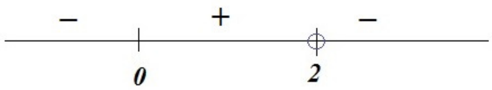
$0-x=0 \;\rightarrow\; x=0$

$(x-2)^3=0 \;\rightarrow\; x-2=0 \;\rightarrow\; x=2\,(\notin Dom\, f(x))$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos:

x	$f'(x)$
-1	$\frac{-(-1)}{(-1-2)^3}=-$
1	$\frac{-1}{(1-2)^3}=+$
3	$\frac{-3}{(3-2)^3}=-$

Luego, el signo de $f'(x)$ es:



Es decir: ***f(x) es creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$.***

d) Máximos y mínimos locales

Del estudio realizado en el apartado anterior obtenemos:

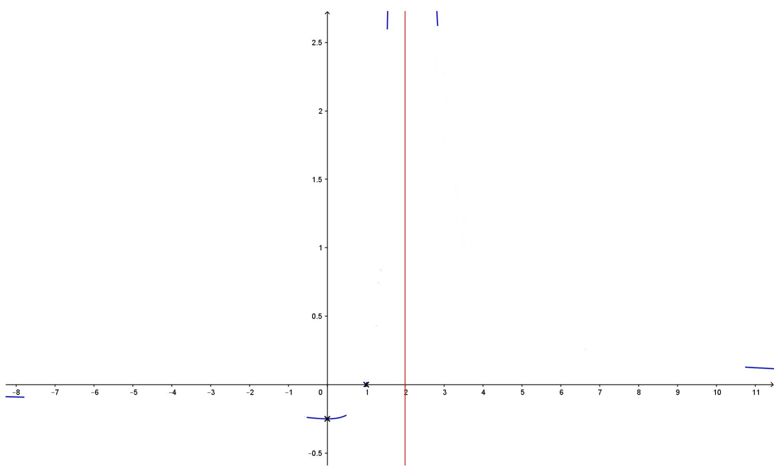
Hay un mínimo local en $x = 0$, (en $x = 2$ no hay nada porque no es del dominio de la función)

Como calculamos en el apartado a) para $x = 0$ $f(0) = \frac{-1}{4}$

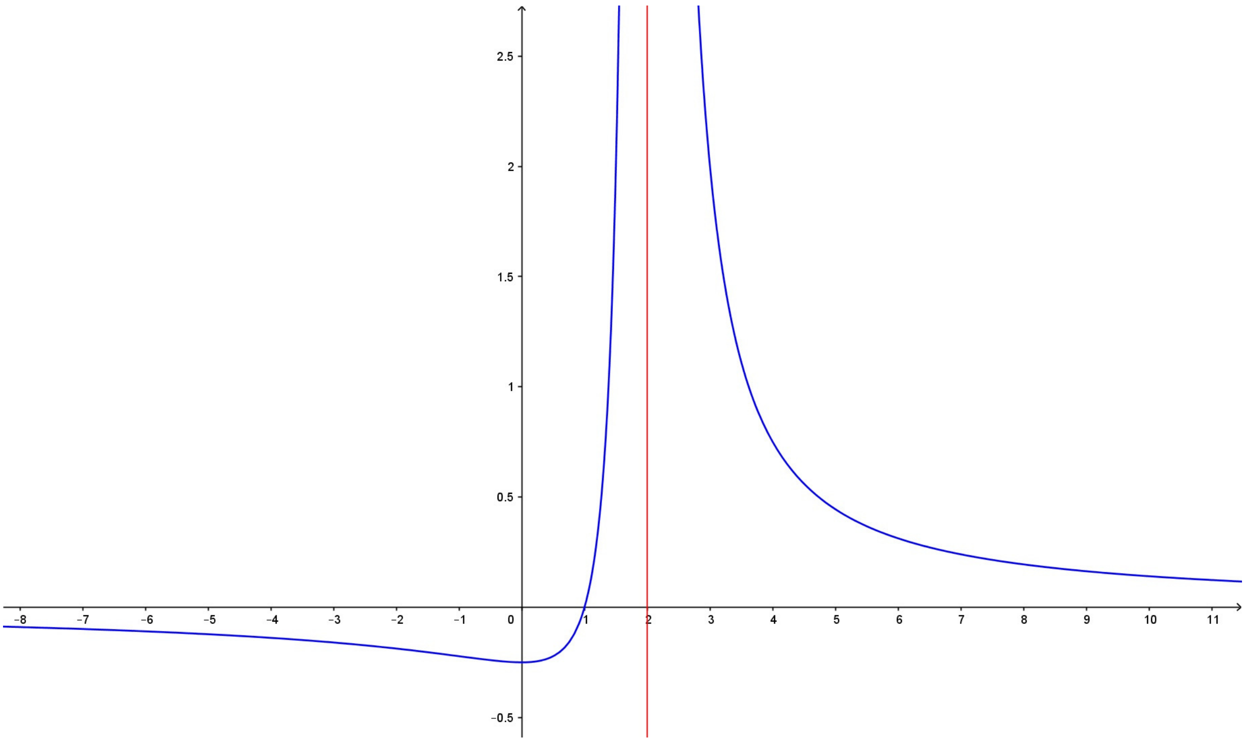
Es decir, ***f(x) tiene un mínimo local en*** $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$.

e) Representación gráfica de f(x)

Situando en los ejes coordenados los puntos de corte, las asíntotas y el mínimo relativo obtenidos en los apartados anteriores,



Teniendo en cuenta la monotonía vista en el aparado c), la representación gráfica será:



2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11