OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:

a) Dominio,

$$2-x=0 \;\rightarrow\; x=2 \;\rightarrow\; Dom\ f(x)=\Re-\{2\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0^2}{2-0}=\frac{0}{2}=0 \;\rightarrow\; (0,0)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{2-x}=0 \;\rightarrow\; x^2=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; (0,0)$$

Sólo hay un punto de corte con los ejes coordenados, el (0 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\underset{x\to-\infty}{Lím}\ f(x)=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{x^2}{2-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{x^2}{-x}=\underset{x\to-\infty}{Lím}(-x)=+\infty$$

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\ f(x)=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{x^2}{2-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{x^2}{-x}=\underset{x\to+\infty}{Lím}(-x)=-\infty$$

Luego f(x) no tiene asíntota horizontal

Asíntotas verticales.

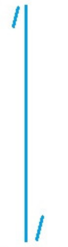
Del dominio de la función deducimos que hay una posible A.V. x = 2

$$\underset{x\to2}{Lím}\frac{x^2}{2-x}=\frac{2^2}{2-2}=\frac{4}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=2 \quad es\ A.V.$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\underset{x\to2^-}{Lím}\frac{x^2}{2-x}\overset{x=1'9}{=}\frac{+}{+}\infty=+\infty$$

$$\underset{x\to2^+}{Lím}\frac{x^2}{2-x}\overset{x=2'1}{=}\frac{+}{-}\infty=-\infty$$


x = 2

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

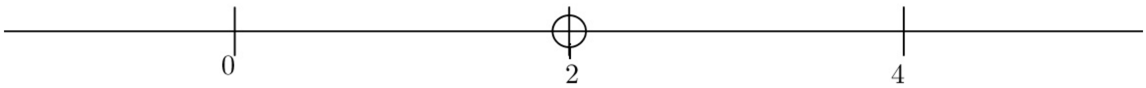
$$f'(x)=\frac{2x\cdot(2-x)-x^2\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

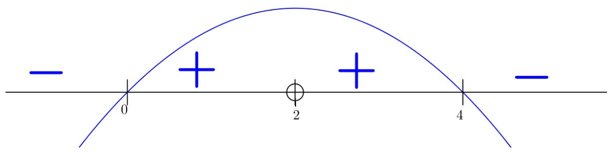
$$4x-x^2=0 \quad\rightarrow\quad x\,(4-x)=0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ 4-x=0 \quad\rightarrow\quad x=4 \end{array}\right.$$

$$(2-x)^2=0 \quad\rightarrow\quad 2-x=0 \quad\rightarrow\quad x=2$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* $(\,2\notin Dom\, f(x)\,)$



El denominador de $f'(x)$ *está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de* $f'(x)$ *sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y raíces 0 y 4, luego,*



Por tanto,

f(x) es creciente en $(\,0\,,\,2\,)\cup(\,2\,,\,4\,)$ ***y***

f(x) es decreciente en $(\,-\infty,\,0\,)\cup(\,4\,,\,+\infty\,)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = 0$ *hay un mínimo local y en* $x = 4$ *hay un máximo local.*

Mínimo local (0 , 0)

Máximo local (4 , – 8)

$$x=4 \quad\rightarrow\quad f(4)=\frac{4^2}{2-4}=\frac{16}{-2}=-8$$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 0) que, además, es mínimo local y máximo local en (4 , – 8); a.v. $x = 2$.

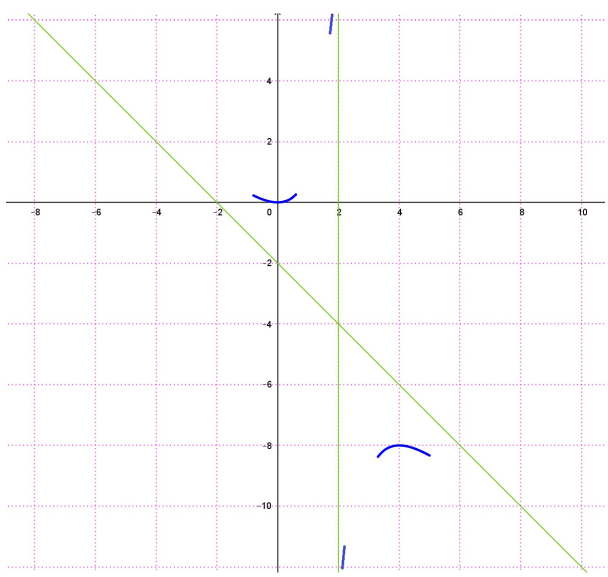
Aunque no se pide esta función tiene una asíntota oblicua (grado numerador = 2, grado denominador = 1, diferencia 1). Vamos a calcularla para representar mejor la función.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -x+2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & -x-2 \\ \hline 2x & \\ -2x+4 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Por tanto la asíntota oblicua es $y = -x-2$

x	$y=-x-2$
-2	0
2	-4

Dibujando estos elementos:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es: