OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$. *(3 puntos)*

b) Calcula $A\,B^t - A^t\,B$. *(3 puntos)*

c) Resolver la ecuación $B^t X + A^t B = A^t$. *(4 puntos)*

siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.

Solución:

a) $(A\,B)^{-1}$.

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo de C^{-1},

$$Como \quad |C| = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -4+8 = 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\ C^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \{traspuesta\} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Luego,\ C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A\,B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

b) $A\,.\,B^t - A^t\,.\,B$

$$A \cdot B^t - A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: $A \cdot B^t - A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $B^t X + A^t B = A^t$.

Despejemos X,

$B^t X = A^t - A^t B$

$$comprobemos\ que\ \exists\left(B^t\right)^{-1}, \quad |B^t| = |B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\left(B^t\right)^{-1}$$

Multiplicando por la izquierda por $\left(B^t\right)^{-1}$,

$$\left(B^t\right)^{-1} B^t X = \left(B^t\right)^{-1}\left[A^t - A^t B\right]$$

$$X = \left(B^t\right)^{-1}\left[A^t - A^t B\right]$$

Calculo de $\left(B^t\right)^{-1}$, *sabemos que su determinante es* 2,

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{traspuesta\} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Luego,\ \left(B^t\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el apartado a) ya calculamos $A^t B$,

$$A^t - A^t B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Y,\ X = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$