OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas. *(3 puntos)*

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este? *(2+1 puntos)*

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta? *(2+1 puntos)*

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta. *(1 punto)*

Solución:

$f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t \quad 0 \le t \le 6$

a) La empresa tiene beneficios cuando $f(t) > 0$ y pérdidas cuando $f(t) < 0$.

$f(t) > 0$

$$t^3 - 8t^2 + 15t > 0$$

$$t^3 - 8t^2 + 15t = 0 \quad \rightarrow \quad t\left(t^2 - 8t + 15\right) = 0 \left\langle \begin{array}{l} t = 0 \\ t^2 - 8t + 15 = 0 \end{array} \right.$$

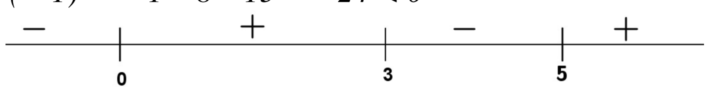
$$t = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} t_1 = \dfrac{8+2}{2} = 5 \\ t_2 = \dfrac{8-2}{2} = 3 \end{array} \right.$$

Hay que estudiar el signo de $f(t)$ en los intervalos:

Como $f(t)$ es un polinomio de tercer grado con tres raíces los signos van alternando.

$f(-1) = (-1)^3 - 8(-1)^2 + 15(-1) = -1 - 8 - 15 = -24 < 0$

Por tanto el signo de $f(t)$ es:



Considerando que la función $f(t)$ está definida en $[0, 6]$, ***la empresa tuvo beneficios en los periodos $(0, 3) \cup (5, 6)$ y tuvo perdidas en $(3, 5)$.***

Para resolver los apartados b) y c) debemos estudiar el signo de $f'(t)$.

$f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t \quad 0 \le t \le 6$

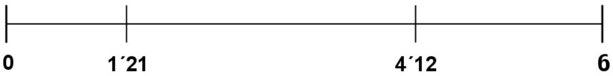
$f'(t) = 3t^2 - 16t + 15$

Signo de $f'(t)$,

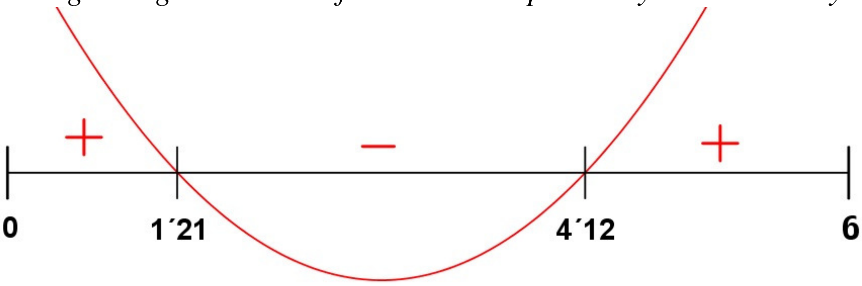
$$3t^2 - 16t + 15 = 0$$

$$t = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{2 \cdot 3} = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3} = \left\langle \begin{array}{l} t_1 = \dfrac{8+\sqrt{19}}{3} \cong 4'1196 \\ t_2 = \dfrac{8-\sqrt{19}}{3} \cong 1'2137 \end{array} \right.$$

Estudiemos el signo de $f'(t)$ en los intervalos:



$f'(t)$ es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces 1´21 y 4´12, por tanto



Entonces $f(t)$ tiene un máximo local en $t = 1´21$ (aprox.), pero como $f(t)$ es creciente de 4´12 a 6, el máximo de $f(t)$ podría alcanzarse para $t = 6$. Calculemos $f(t)$ para estos dos valores,

t	$f(t)$
$\frac{8-\sqrt{19}}{3}(\cong 1´21)$	$\left(\frac{8-\sqrt{19}}{3}\right)^3 - 8\cdot\left(\frac{8-\sqrt{19}}{3}\right)^2 + 15\cdot\left(\frac{8-\sqrt{19}}{3}\right) = 8´2088$
6	$6^3 - 8\cdot 6^2 + 15\cdot 6 = 18$

El máximo valor de $f(t)$ se alcanza en $t = 6$ años y $f(6) = 18$ decenas de miles de euros

El mínimo local está en $t = 4´12$ (aprox.), pero como $f(t)$ es creciente de 0 a 1´21, el mínimo de $f(t)$ podría alcanzarse en $t = 0$. Calculemos $f(t)$ para estos dos valores,

t	$f(t)$
0	$0^3 - 8\cdot 0^2 + 15\cdot 0 = 0$
$\frac{8+\sqrt{19}}{3}(\cong 4´12)$	$\left(\frac{8+\sqrt{19}}{3}\right)^3 - 8\cdot\left(\frac{8+\sqrt{19}}{3}\right)^2 + 15\cdot\left(\frac{8+\sqrt{19}}{3}\right) = -4´0607$

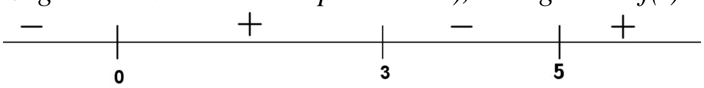
El mínimo valor de $f(t)$ se alcanza en $t = 4´1196$ años y $f(4´1196) = -4´0607$ decenas de miles de euros

Respondamos a los apartados b) y c).

b) ***El máximo beneficio se alcanza a los seis años y es de 180000 euros.***

c) ***La máxima pérdida se produjo al cabo de 4´1196 años y esta pérdida fue de 40607 euros.***

d) Según obtuvimos en el apartado a), el signo de $f(t)$ es:



Es decir, que a partir de 5 años la función $f(t)$ es positiva. Por tanto, ***a partir de los 6 años la empresa no volverá a tener periodos alternos de beneficios y pérdidas*** *sino que, a partir de ese momento, la empresa siempre tiene beneficios.*