Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Dada la función $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:

a) Dominio,

$$x^2-4=0 \;\rightarrow\; x^2=4 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \;\rightarrow\; Dom\, f(x)=\Re-\{-2, 2\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{1-0^2}{0^2-4}=\frac{-1}{4} \;\rightarrow\; \left(0, \frac{-1}{4}\right)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{1-x^2}{x^2-4}=0 \;\rightarrow\; 1-x^2=0 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \;\rightarrow\; \left\langle \begin{matrix}(-1, 0)\\(1, 0)\end{matrix}\right.$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: (– 1, 0), (1, 0) y $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$ **.**

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} (-1) = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (-1) = -1$$

, *la asíntota horizontal es y = – 1 .*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. x = – 2 y x = 2

$$\lim_{x\to-2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-(-2)^2}{(-2)^2-4} = \frac{-3}{0} = \infty \;\rightarrow\; x=-2 \quad es\ A.V.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-2^2}{2^2-4} = \frac{-3}{0} = \infty \;\rightarrow\; x=2 \quad es\ A.V.$$

La asíntota horizontal es y = – 1 y las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 2.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

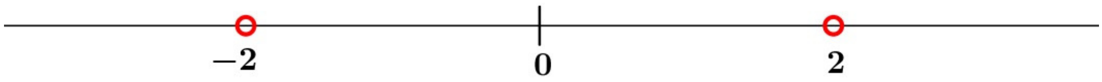
$$f'(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2-4\right)-\left(1-x^2\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{6x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

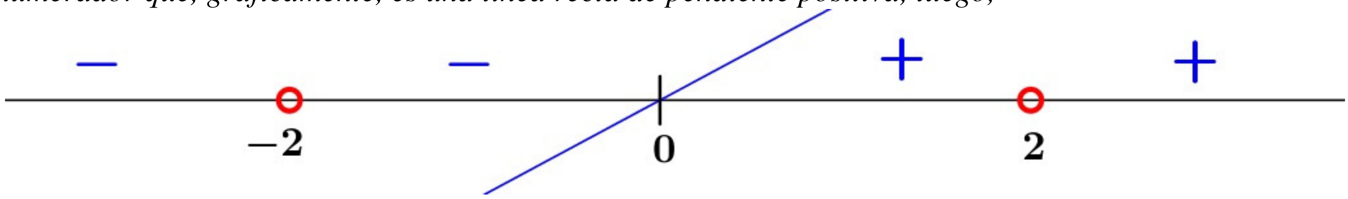
$6x=0 \quad\rightarrow\quad x=0$

$\left(x^2-4\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-4=0 \quad\rightarrow\quad \{\text{resuelta en a})\} \quad x=\pm 2$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* $\left(\{-2,2\}\notin Dom\ f(x)\right)$



El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de f´(x) sólo depende del numerador que, gráficamente, es una línea recta de pendiente positiva, luego,



Por tanto,

f(x) es creciente en $(0,2)\cup(2,+\infty)$ ***y***

f(x) es decreciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = 0$ *hay un mínimo local ya que* $f'(0) = 0$ *y a la izquierda la función es decreciente y a la derecha creciente.*

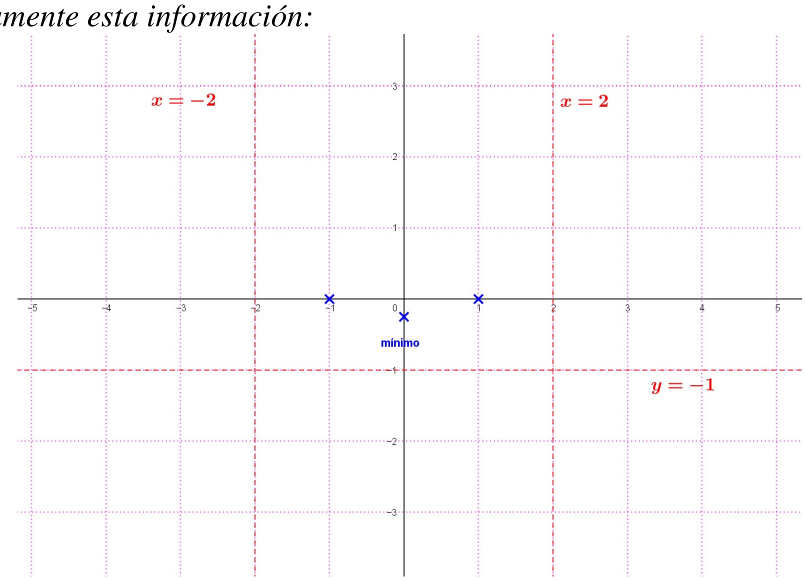
Mínimo local en el punto $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$.

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(-1, 0)$, $(1, 0)$ *y* $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$, *mínimo local en* $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$; *a.h.* $y=-1$, *a.v.* $x=-2$ *y* $x=2$.

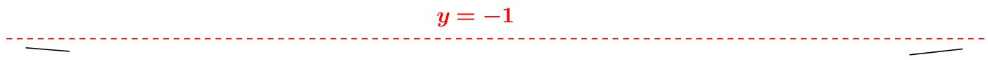
Representando gráficamente esta información:



Para completar la representación veamos la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal A.H. $y=-1$

$$En-\infty,\quad x=-1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{1-(-1000)^2}{(-1000)^2-4}=-1'000003...$$

$$En+\infty,\quad x=1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{1-1000^2}{1000^2-4}=-1'000003...$$



Considerando esta posición de la curva respecto de la a.h, las a.v y los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es: