Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función

$$f(x) = 36600 + 1500\,x - 15\,x^2$$

donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980. *(2 puntos)*
b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos). *(4 puntos)*
c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100},$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento. (4 *puntos)*

Solución:
$f(x) = 36600 + 1500\,x - 15\,x^2$;
x años transcurridos desde 1980 {luego $x \geq 0$}, f(x) gas extraído en miles de m^3.

a) ¿f(x) al inicio de 1980?
Al inicio de 1980, $x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 36600 + 1500 \,.\, 0 - 15 \,.\, 0^2 = 36600$

Al inicio de 1980, la capacidad de explotación era de 36600 miles de m^3 o 36600000 m^3.

b) ¿x? / f(x) sea máximo. Sabemos que Dom f(x) = [0 , +∞).
Estudiemos el signo de f´(x):

$f'(x) = 1500 - 30\,x$

$1500 - 30\,x = 0; \quad 1500 = 30\,x; \quad x = \frac{1500}{30} = 50$

Estudiemos el signo de f´(x) a ambos lados de x = 50,

x	$f'(x) = 1500 - 30x$	
20	$1500 - 30 \cdot 20 = 900$	+
60	$1500 - 30 \cdot 60 = -300$	−

A la izquierda positivo y a la derecha negativo, en x = 50 hay un máximo relativo que es el absoluto por ser la función f(x) a la izquierda creciente y a la derecha decreciente.

$x = 50 \;\rightarrow\; f(50) = 36000 + 1500 \,.\, 50 - 15 \,.\, 50^2 = 74100$

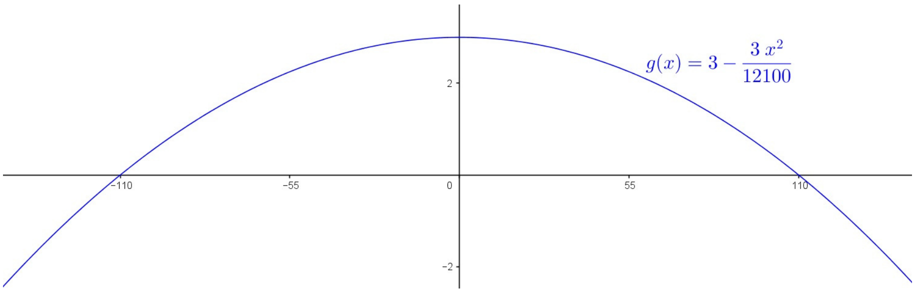
Por tanto, ***desde el inicio de 19080 han de pasar 50 años para que la capacidad alcance su valor máximo. Y este valor máximo será de 74100 miles de m^3.***

c) Beneficio por m^3 es $g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$,

¿x? / g(x) = 0

$$3 - \frac{3x^2}{12100} = 0; \quad 36300 - 3x^2 = 0; \quad 3x^2 = 36300; \quad x^2 = \frac{36300}{3} = 12100; \quad x = \pm\sqrt{12100} = \pm 110$$

Como g(x) es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces las anteriores, gráficamente g(x) será:



Luego para $x \geq 110$ $g(x) \leq 0$

Por tanto, ***la explotación deja de ser rentable al cabo de 110 años.***

$f(110) = 36000 + 1500 \cdot 110 - 15 \cdot 110^2 = 20100$

La capacidad de la explotación, al cabo de 110 años, será de 20100 miles de $\boldsymbol{m^3}$.