Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Si A y B *son* dos sucesos tales que $P(A)$ = 0,4, $P(B/A)$ = 0,25 y $P(B^c)$ = 0,75, se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué? *(2´5 puntos)*
b) Calcula $P(A \cup B)$. *(2´5 puntos)*
c) Calcula $P(A/ B^c)$. *(2´5 puntos)*
d) Calcula $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$. *(2´5 puntos)*

(A^c y B^c representan, respectivamente, el suceso complementario de A y el suceso complementario de B).

Solución:
Los datos del problema son:

$P(A) = 0´4$

$$P\left(B/A\right) = 0´25 \quad \rightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0´25 \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = 0´25 \cdot P(A) = 0´25 \cdot 0´4 = 0´1$$

$$P(B^c) = 0´75 \quad \rightarrow \quad 1 - P(B) = 0´75 \quad \rightarrow \quad 1 - 0´75 = P(B) \quad \rightarrow \quad P(B) = 0´25$$

a) ¿A y B son independientes?
Los sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
De lo calculado anteriormente,
$P(A \cap B) = 0´1$ *y* $P(A) \cdot P(B) = 0´4 \cdot 0´25 = 0´1$
Entonces $P(A \cap B) = 0´1 = P(A) \cdot P(B)$

En conclusión, ***A y B son sucesos independientes****.*

b) ¿P(A ∪ B)?
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0´4 + 0´25 - 0´1 = 0´55$

Solución: P(A ∪ B) = 0´55

c) $P(A/B^c)$

$$P\left(A/B^c\right) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0´3}{0´75} = \frac{2}{5} = 0´4$$

Calculemos $P(A \cap B^c)$,

$A = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, *luego*

$$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B^c)] = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) - P(A \cap B \cap A \cap B^c) =$$

$$A \cap B \cap A \cap B^c = A \cap B \cap B^c = \{Como \quad B \cap B^c = \varnothing\} = A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) - P(\varnothing) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) - 0 = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

Hemos obtenido: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \;\rightarrow\; 0´4 = 0´1 + P(A \cap B^c) \;\rightarrow\; P(A \cap B^c) = 0´4 - 0´1 = 0´3$

Solución: $P(A/B^c) = 0´4$

d) ¿$P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$?

Por las leyes de Morgan: $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$. *Por tanto,*

$$P\left(A^c \cup B^c\right) = P\left(\left(A \cap B\right)^c\right) = 1 - P\left(A \cap B\right) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

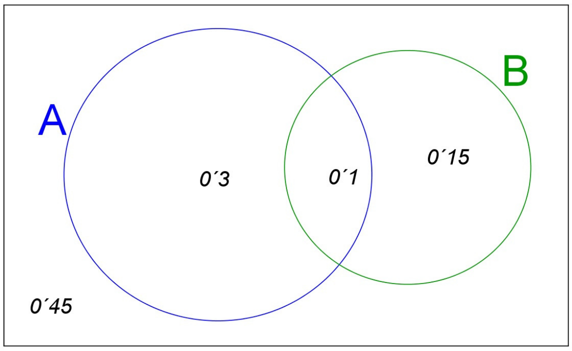
Análogamente, por las leyes de Morgan: $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$. *Por tanto,*

$$P\left(A^c \cap B^c\right) = P\left(\left(A \cup B\right)^c\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$$

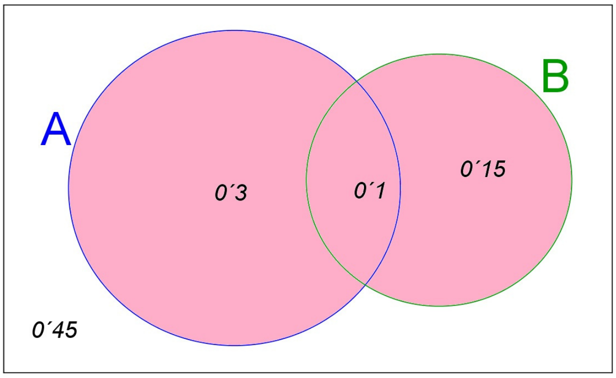
Por tanto, $\mathbf{P(A^c \cup B^c) = 0{,}9}$ **y** $\mathbf{P(A^c \cap B^c) = 0{,}45}$.

* * * * * * *

Los apartados b, c y d podemos resolverlos utilizando el diagrama de Venn de estos dos sucesos.
De los datos y cálculos realizados inicialmente se deduce que:



b) ¿$P(A \cup B)$?



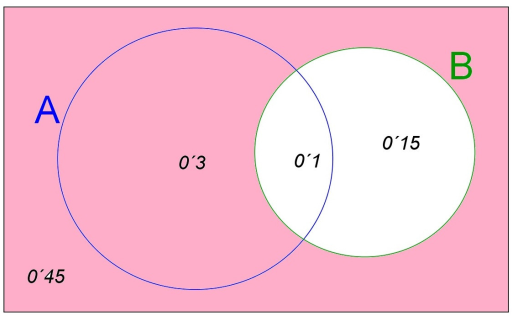
$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}55$

c) $P(A/B^c)$

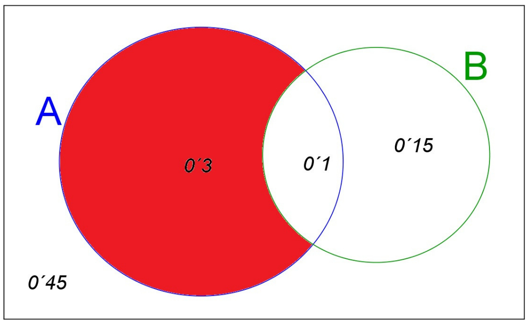
$$P\left(A/_{B^c}\right) = \frac{P\left(A \cap B^c\right)}{P\left(B^c\right)}$$

Obtengamos $A \cap B^c$,

B^c *es:*

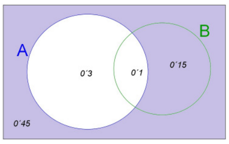


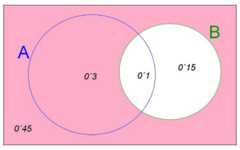
y $A \cap B^c$ *es:*

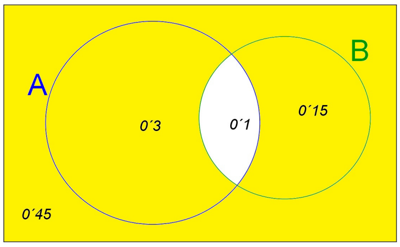


Luego, $P\left(A \cap B^c\right) = 0{,}3$ y $P\left(A/_{B^c}\right) = \frac{P\left(A \cap B^c\right)}{P\left(B^c\right)} = \frac{0{,}3}{0{,}75} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

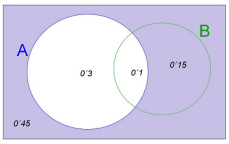
d) ¿$P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$?

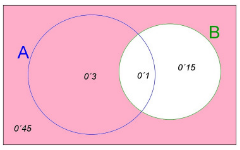
A^c *es:* 

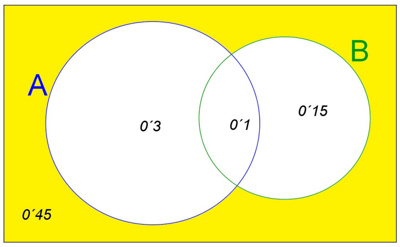
B^c *es:* 

y $A^c \cup B^c$ *es:* 

Luego $P(A^c \cup B^c) = 1 - 0´1 = 0´9$.

A^c *es:* 

B^c *es:* 

y $A^c \cap B^c$ *es:* 

Por lo que $P(A^c \cap B^c) = 0´45$.