Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$(x+1)^2=0 \;\rightarrow\; x+1=0 \;\rightarrow\; x=-1 \;\rightarrow\; Dom\ f(x)=\Re-\{-1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0^2+0-2}{(0+1)^2}=\frac{-2}{1}=-2 \;\rightarrow\; (0,-2)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=0 \;\rightarrow\; x^2+x-2=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 3}{2}=$$

$$=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases} \;\rightarrow\; (-2,0) \;\; y \;\; (1,0)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , – 2), (1, 0) y (– 2 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}(1)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(1)=1$$

, *la asíntota horizontal es y = 1.*

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay la posible A.V. es x = – 1,

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=\frac{(-1)^2+(-1)-2}{(-1+1)^2}=\frac{-2}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=-1 \;\; es\ A.V.$$

La asíntota horizontal es y = 1 y la asíntota vertical es x = – 1.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot(x+1)^2-(x^2+x-2)\cdot 2(x+1)}{\left[(x+1)^2\right]^2}=\frac{(2x+1)\cdot(x+1)^2-(x^2+x-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\left\{\begin{matrix}\textit{simplificando}\\ \textit{entre } (x+1)\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{(2x+1)\cdot(x+1)-(x^2+x-2)\cdot 2}{(x+1)^3}=\frac{2x^2+2x+x+1-2x^2-2x-4}{(x+1)^3}=\frac{x+5}{(x+1)^3}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

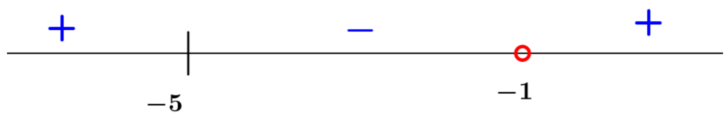
$x+5=0 \quad\rightarrow\quad x=-5$

$(x+1)^3=0 \quad\rightarrow\quad x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=-1$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $\left(\{-1\}\notin Dom\, f(x)\right)$

Calculemos el signo de f´(x) en cada uno de estos intervalos,

x	$\frac{x+5}{(x+1)^3}$
-6	$\frac{-6+5}{(-6+1)^3}=+$
-2	$\frac{-2+5}{(-2+1)^3}=-$
0	$\frac{0+5}{(0+1)^3}=+$



Por tanto,

f(x) es creciente en $(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$ ***y f(x) es decreciente en (– 5 , – 1)***

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x=-5$ hay un máximo local ya que $f'(-5)=0$ y a la izquierda la función es creciente y a la derecha decreciente. Y la función no tiene mínimos locales.

$$x=-5 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{(-5)^2+(-5)-2}{(-5+1)^2}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}=1'125$$

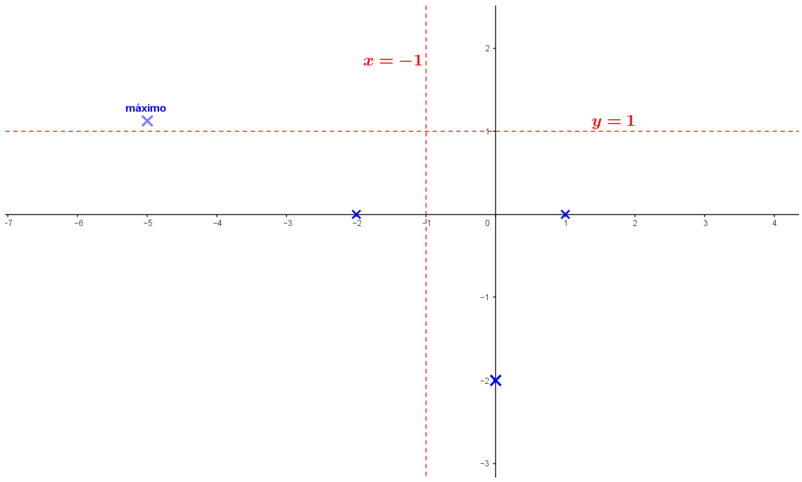
La función tiene un máximo local en el punto $\left(-5\,,\frac{9}{8}\right)$ ***y no tiene mínimos locales.***

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , – 2), (1, 0) y (– 2 , 0), máximo local en $\left(-5\,,\frac{9}{8}\right)$*; a.h. $y=1$, a.v. $x=-1$.*

Representando gráficamente esta información:



Para completar la representación veamos la posición de la curva respecto de sus asíntotas:

A.H. y = 1

$$En -\infty,\quad x=-1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{(-1000)^2-1000-2}{(-1000+1)^2}=1'000998...$$

$$En +\infty,\quad x=1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{1000^2+1000-2}{(1000+1)^2}=0'998...$$

A.V. x = – 1

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}\overset{x=-1'1}{=}\frac{(-1'1)^2-1'1-2}{(-1'1+1)^2}\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}\overset{x=-0'9}{=}\frac{(-0'9)^2-0'9-2}{(-0'9+1)^2}\infty=-\infty$$

Considerando esta posición de la curva respecto de la a.h, la a.v y los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es: