Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II Junio 2023

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? *(2 puntos)*

Solución:

Llamando: $x = n^o$ *de latas del tipo A* $\qquad y = n^o$ *de latas del tipo B*

Los datos del problema los resumimos en la tabla:

Lata	*hidratos de carbono*	*proteínas*	*grasas*	*euros/lata*
A	*4*	*6*	*1*	*10*
B	*2*	*20*	*12*	*16*

Las restricciones serán:

El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente

"un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono" $\rightarrow \quad 4x + 2y \geq 8$

"un mínimo de 46 unidades de proteínas" $\rightarrow \quad 6x + 20y \geq 46$

"un mínimo de 12 unidades de grasas" $\rightarrow \quad x + 12y \geq 12$

Como las variables x *e* y *representan latas, deben ser números naturales.*

El precio a pagar viene dado por la función: $z = 10x + 16y$

El problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \quad z = 10x + 16y$$

$$s.a. \begin{cases} 4x + 2y \geq 8 \\ 6x + 20y \geq 46 \\ x + 12y \geq 12 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$4x + 2y \geq 8$

$4x + 2y = 8$

x	y
0	4
2	0

¿(0,0) cumple?

$4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \geq 8 \quad No$

$6x + 20y \geq 46$

$6x + 20y = 46$

x	y
0	$\frac{46}{20} = \frac{23}{10} = 2'3$
$\frac{46}{6} = \frac{23}{3} \cong 7'6$	0

¿(0,0) cumple?

$6 \cdot 0 + 20 \cdot 0 \geq 46 \quad No$

$x + 12y \geq 12$

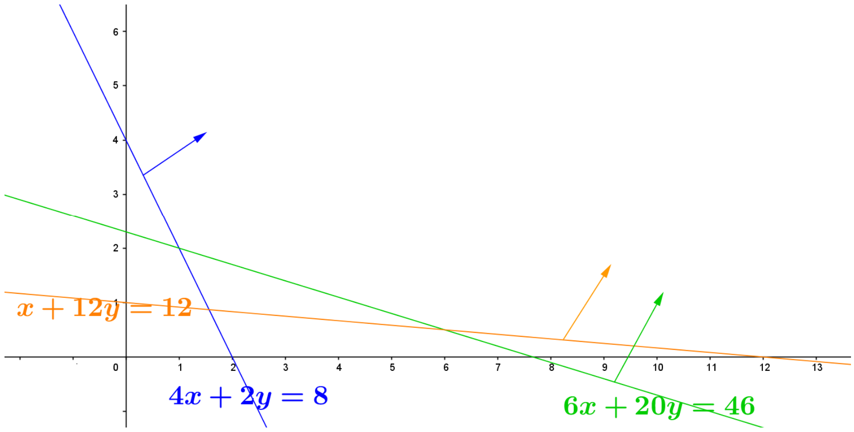
$x + 12y = 12$

x	y
0	1
12	0

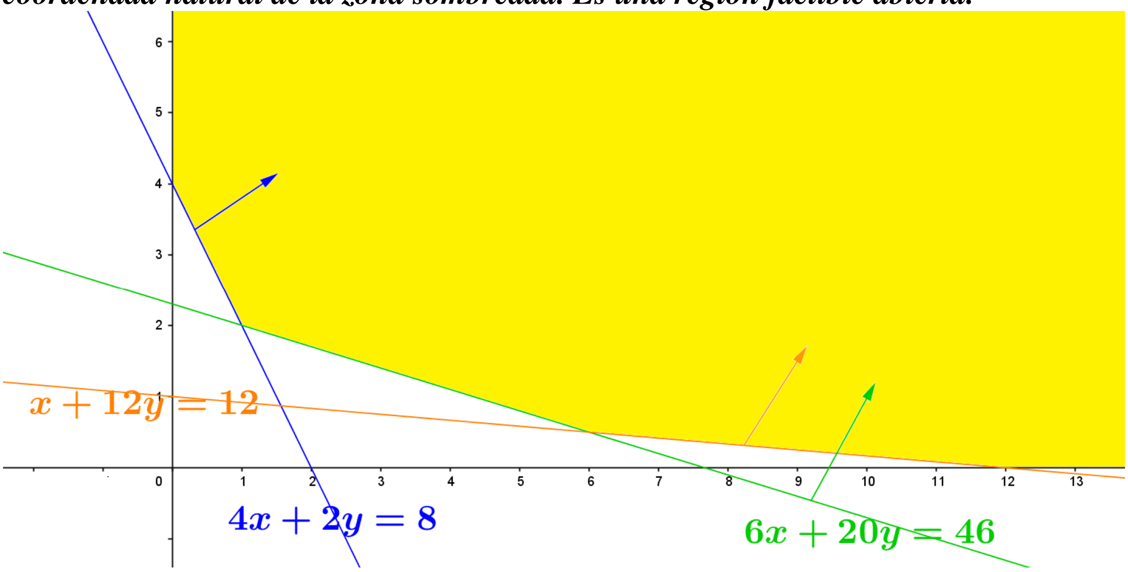
¿(0,0) cumple?

$0 + 12 \cdot 0 \geq 12 \quad No$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada. Es una región factible abierta.



Vértices de la región factible:

El del eje horizontal y vertical los obtuvimos en los cálculos para la representación: (12 , 0) y (0 , 4).

Faltan los puntos de corte entre las rectas.

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} 4x+2y=8 \\ 6x+20y=46 \end{cases} \rightarrow \quad -10x1^a \begin{cases} -40x-20y=-80 \\ 6x+20y=46 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-34\ x = -34; \quad x = \dfrac{-34}{-34} = 1$ *Luego punto de corte (1 , 2)*

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,

$4 \cdot 1 + 2y = 8; \quad 2y = 8 - 4; \quad 2y = 4; \quad y = 2$

$$\begin{cases} x+12y=12 \\ 6x+20y=46 \end{cases} \rightarrow \quad -6x1^a \begin{cases} -6x-72y=-72 \\ 6x+20y=46 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-52y=-26; \quad y = \dfrac{-26}{-52} = \dfrac{1}{2}$ *Luego punto de corte* $\left(6, \dfrac{1}{2}\right)$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,

$x + 12\dfrac{1}{2} = 12; \quad x+6=12; \quad x = 12-6 = 6$

Los vértices de la región factible son: (0 , 4), (1 , 2), $\left(6, \dfrac{1}{2}\right)$ *y (12 , 0).*

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	$z = 10x + 16y$	
$0 , 4$	$10 . 0 + 16 . 4 = 64$	
$1 , 2$	$10 . 1 + 16 . 2 = 42$	*mínimo*
$6 , \frac{1}{2}$	$10 . 6 + 16 . \frac{1}{2} = 68$	
$12 , 0$	$10 . 12 + 16 . 0 = 120$	

El mínimo se alcanza en el punto (1 , 2)

Por tanto,

a) ***Para obtener la dieta deseada por el mínimo precio debe combinar 1 lata del tipo A y 2 del tipo B.***

b) ***El mínimo precio que habrá de pagar será de 42€ al día.***