Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^t A = A A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. *(4 puntos)*

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A X = B^t X - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}. \qquad (6\ puntos)$$

Solución:

a) $¿x?\ /\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ *sea normal.*

La matriz debe cumplir $A^t A = A A^t$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad de matrices da lugar al sistema:

$$\begin{cases} 5 = 5 \quad identidad \\ 2-x = -2+x \rightarrow 2+2 = x+x \rightarrow 4 = 2x \rightarrow x = 2 \\ 2-x = -2+x \rightarrow x = 2 \\ 1+x^2 = 1+x^2 \quad identidad \quad (se\ cumple\ para\ cualquier\ valor\ de\ x) \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 2$.

Solución: la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ ***es normal para*** $x = 2$.

b) $X\ /\ A X = B^t X - C$

Despejemos X *de la ecuación matricial dada.*

$A X - B^t X = -C;\quad (A - B^t) X = -C,$ *si existe* $(A - B^t)^{-1} \rightarrow$ *multiplicando por* $(A - B^t)^{-1}$ *por la izquierda:* $(A - B^t)^{-1}(A - B^t) X = (A - B^t)^{-1}(-C) \rightarrow X = -(A - B^t)^{-1} C$

Comprobemos que existe $(A - B^t)^{-1}$,

$$A - B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad como \quad |A - B^t| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists\ (A - B^t)^{-1}$$

$$A - B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{traspuesta\} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $(A - B^t)^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$Finalmente, \quad X = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) & -1\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot(-3) & 1\cdot 2 + 0\cdot(-3) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$