Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$2x^2-3x-2=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}=\begin{cases} x_1=\dfrac{3+5}{4}=2 \\ x_2=\dfrac{3-5}{4}=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

$$\rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\left\{\frac{-1}{2}\,,\,2\right\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2+2\cdot 0-15}{2\cdot 0^2-3\cdot 0-2}=\frac{-15}{-2}=\frac{15}{2} \quad\rightarrow\quad \left(0\,,\frac{15}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=0;\quad x^2+2x-15=0 \quad\rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-2+8}{2}=3 & (3\,,0) \\ x_2=\dfrac{-2-8}{2}=-5 & (-5\,,0)\end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $\left(0\,,\dfrac{15}{2}\right)$, $(-5\,,0)$ ***y*** $(3\,,0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

, la asíntota horizontal es $y=\dfrac{1}{2}$.

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles a.v. $x=\dfrac{-1}{2}$ *y* $x=2$.

$$\lim_{x\to -1/2} f(x)=\lim_{x\to -1/2}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\frac{\left(-1/2\right)^2+2\left(-1/2\right)-15}{2\left(-1/2\right)^2-3\left(-1/2\right)-2}=\frac{-63/4}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=\frac{-1}{2}\quad es\ a.v.$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\frac{2^2+2\cdot 2-15}{2\cdot 2^2-3\cdot 2-2}=\frac{-7}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=2\quad es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es $y=\dfrac{1}{2}$ ***y las asíntotas verticales son*** $x=\dfrac{-1}{2}$ *y* $x=2$.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)\cdot(2x^2-3x-2)-(x^2+2x-15)\cdot(4x-3)}{(2x^2-3x-2)^2}=\frac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2-3x-2\\ 2x+2\\ \hline 4x^2-6x-4\\ 4x^3-6x^2-4x\quad\\ \hline 4x^3-2x^2-10x-4 \end{array}\qquad \begin{array}{r} x^2+2x-15\\ 4x-3\\ \hline -3x^2-6x+45\\ 4x^3+8x^2-60x\quad\\ \hline 4x^3+5x^2-66x+45 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 4x^3-2x^2-10x-4\\ -4x^3-5x^2+66x-45\\ \hline -7x^2+56x-49 \end{array}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

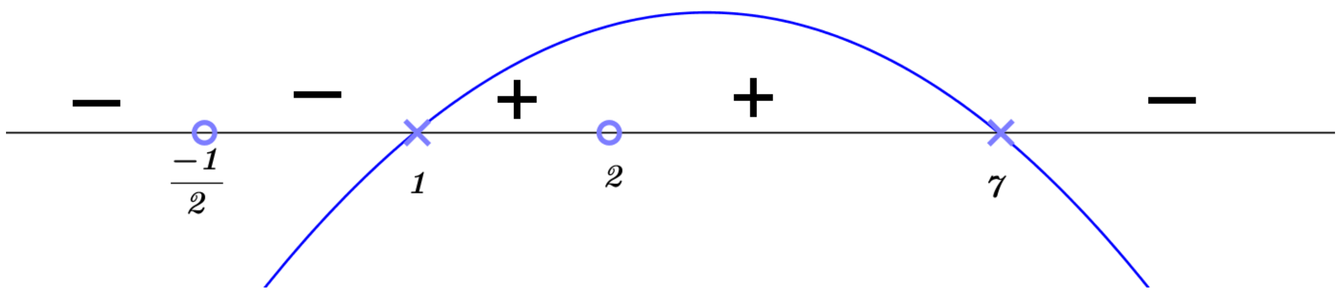
$$-7x^2+56x-49=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-56\pm\sqrt{56^2-4\cdot(-7)\cdot(-49)}}{2\cdot(-7)}=\frac{-56\pm\sqrt{3136-1372}}{-14}=\frac{-56\pm 42}{-14}=$$

$$=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-56+42}{-14}=\dfrac{-14}{-14}=1\\[2mm] x_2=\dfrac{-56-42}{-14}=\dfrac{-98}{-14}=7 \end{array}\right.$$

$$(2x^2-3x-2)^2=0 \quad\rightarrow\quad 2x^2-3x-2=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\}\quad x=\frac{-1}{2}\quad y\quad x=2$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* $\left(\left\{\frac{-1}{2},2\right\}\notin Dom\ f(x)\right)$

El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de f´(x) sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces 1 y 7, luego,*



Por tanto,

f(x) es creciente en $(1,2)\cup(2,7)$ ***y***

f(x) es decreciente en $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)\cup\left(\frac{-1}{2},1\right)\cup(7,+\infty)$.

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = 1$ *hay un mínimo local y en* $x = 7$ *hay un máximo local.*

$$x=1\quad f(1)=\frac{1^2+2\cdot 1-15}{2\cdot 1^2-3\cdot 1-2}=\frac{-12}{-3}=4\quad\rightarrow\quad Mínimo\ local\quad (1,4)$$

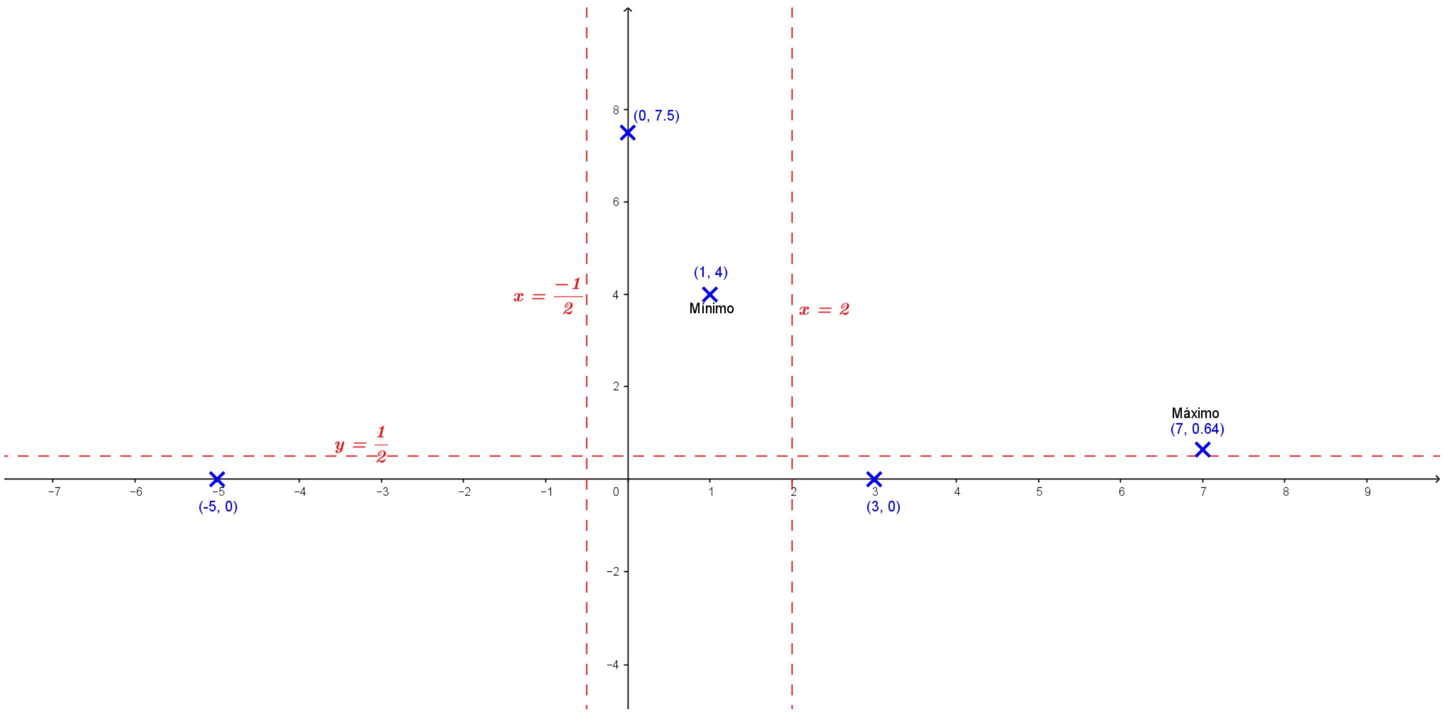
$$x=7\quad f(7)=\frac{7^2+2\cdot 7-15}{2\cdot 7^2-3\cdot 7-2}=\frac{48}{75}=\frac{16}{25}=0'64\quad\rightarrow\quad Máximo\ local\quad \left(7,\frac{16}{25}\right)$$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0, 4)$, $\left(\frac{-2}{3}, 0\right)$ *y* $(2, 0)$, *mínimo local en* $(0, 4)$, *máximo local en* $\left(-2, \frac{16}{5}\right)$; *a.h.* $y = 3$, *a.v.* $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y* $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Representando gráficamente esta información:

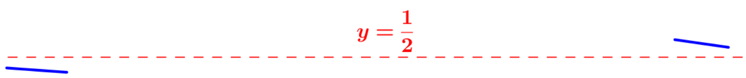


Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal.

A.H. $y = \frac{1}{2}$

$$En\ -\infty, \quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{(-1000)^2 + 2\cdot(-1000) - 15}{2\cdot(-1000)^2 - 3\cdot(-1000) - 2} = 0'4982\ldots < \frac{1}{2}$$

$$En\ +\infty, \quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1000^2 + 2\cdot 1000 - 15}{2\cdot 1000^2 - 3\cdot 1000 - 2} = 0'5017\ldots > \frac{1}{2}$$



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es: