EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Se pretende cultivar en un terreno dos tipos de olivos: A y B. No se puede cultivar más de 8 ha. con olivos de tipo A ni más de 10 ha. con olivos de tipo B. Cada hectárea de olivos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 44 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4500 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de olivar de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 litros anuales de aceite,

a) Obtener razonadamente las hectáreas de cada tipo de olivo que se deben plantar para maximizar la producción de aceite.
b) Obtener la producción máxima.

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la tabla

Tipo de olivo	*Agua por ha. y año*	*Inversión por ha.*	*Producción por ha.*	*ha. dedicadas*
A	*4* m^3	*500 €*	*500 l*	*x*
B	*3* m^3	*225 €*	*300 l*	*y*
Restricciones	*44* m^3	*4500 €*		

Las ecuaciones de las restricciones serán,

"No se pueden cultivar más de 8 ha. con olivos del tipo A" $x \leq 8$

"No se pueden cultivar más de 10 ha. con olivos del tipo B" $y \leq 10$

"Se dispone de 44 m^3 *de agua al año"* $4x + 3y \leq 44$

"Se dispone de 4500 € para invertir" $500x + 225y \leq 4500$

Queremos maximizar la producción de aceite que será: 500 x + 300 y

El problema a resolver es:

maximizar $z = 500x + 300y$

$$s.a.\quad \begin{cases} x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 44 \\ 500x + 225y \leq 4500 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

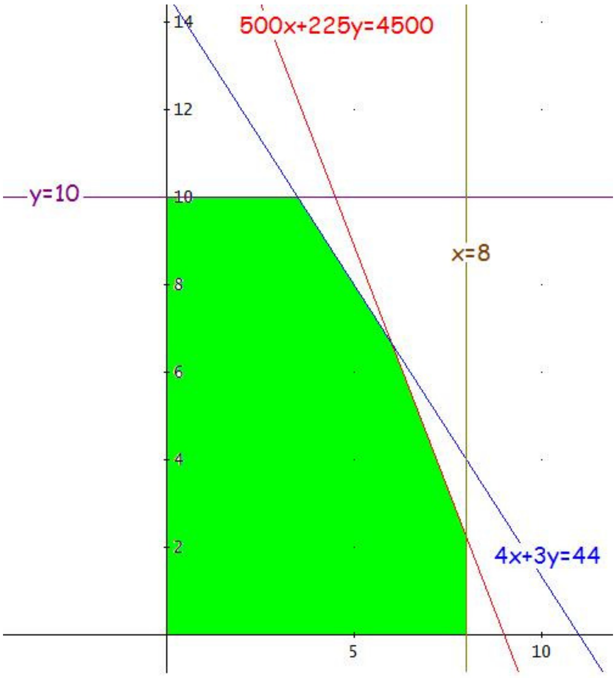
$4x + 3y \leq 44$ $\qquad$ $500x + 225y \leq 4500$

$4x + 3y = 44$ $\qquad$ $500x + 225y = 4500$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 11 & 0 \\ 0 & \frac{44}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 9 & 0 \\ 0 & 20 \end{array}$$

¿(0,0) *cumple*? $\qquad$ ¿(0,0) *cumple*?

$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 44$ *sí* $\qquad$ $500 \cdot 0 + 225 \cdot 0 \leq 4500$ *sí*



Debemos calcular los siguientes puntos de corte,

$$\begin{cases} y = 10 \\ 4x + 3y = 44 \end{cases} \qquad 4x + 3.10 = 44 \quad \rightarrow \quad 4x = 14 \quad \rightarrow \quad x = \frac{14}{4} = 3'5 \quad \rightarrow \quad (3'5\,,10)$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 44 \\ 500x + 225y = 4500 \end{cases} \qquad \textit{de la } 1^{\text{a}} \quad y = \frac{44 - 4x}{3}$$

sustituyendo en la 2^{a} $\quad 500x + 225\dfrac{44 - 4x}{3} = 4500$

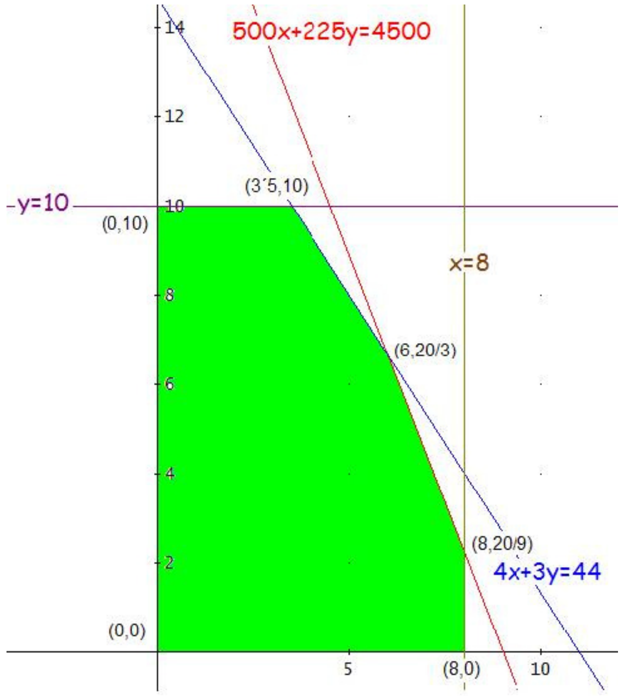
$$1500x + 9900 - 900x = 13500$$

$$600x = 3600 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3600}{600} = 6 \quad \rightarrow \quad y = \frac{44 - 4\,.\,6}{3} = \frac{20}{3} \qquad \rightarrow \quad \left(6\,, \frac{20}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ 500x + 225y = 4500 \end{cases} \qquad 500\,.\,8 + 225y = 4500 \quad \rightarrow \quad 225y = 500 \quad \rightarrow \quad y = \frac{500}{225} = \frac{20}{9} \quad \rightarrow \quad \left(8\,, \frac{20}{9}\right)$$

La región factible está limitada por los puntos

$(0\,,0)$, $(0\,,10)$, $(3'5\,,10)$, $\left(6\,, \dfrac{20}{3}\right)$, $\left(8\,, \dfrac{20}{9}\right)$ *y* $(8\,,0)$



Sabemos que la función que queremos maximizar alcanzará su máximo en los extremos de la región factible.

(x, y)	$z = 500x + 300y$	
(0,0)	$500 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0$	
(0,10)	$500 \cdot 0 + 300 \cdot 10 = 3000$	
(3´5,10)	$500 \cdot 3´5 + 300 \cdot 10 = 4750$	
$\left(6, \frac{20}{3}\right)$	$500 \cdot 6 + 300 \cdot \frac{20}{3} = 5000$	*máximo*
$\left(8, \frac{20}{9}\right)$	$500 \cdot 8 + 300 \cdot \frac{20}{9} = 4666´666...$	
(8,0)	$500 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 4000$	

La función z = 500 x + 300 y alcanza su máximo en el punto $\left(6, \frac{20}{3}\right)$

Por lo tanto, para maximizar la producción de aceite se deben plantar 6 ha de olivos del tipo A y 20/3 ha de olivos del tipo B.
La producción máxima será de 5000 l de aceite.