EJERCICIO A

PROBLEMA 3. El coste total en euros de la producción de x litros de un determinado producto viene dado por

$$C(x)=\frac{1}{2}x^2+5x+800$$

Definir la función que determina el coste medio por litro producido y determinar de forma razonada con qué producción dicho coste medio será mínimo. ¿Cuál es el valor de dicho coste?

Solución:
El coste total de producir x litros es C(x), por lo tanto el coste medio por litro producido será:

$$CM(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{\frac{1}{2}x^2+5x+800}{x}=\frac{x}{2}+5+\frac{800}{x}$$

Debemos calcular x de manera que CM(x) sea mínimo,

$$CM'(x)=\frac{1}{2}+0-\frac{800}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{800}{x^2}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{800}{x^2}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}=\frac{800}{x^2} \quad\rightarrow\quad x^2=1600 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1600}=\pm 40$$

como x representa los litros producidos no tiene sentido la solución negativa, luego x = 40

$$CM''(x)=\frac{1600}{x^3} \quad , \quad CM''(40)=\frac{1600}{40^3}>0$$

para x = 40 se alcanza un mínimo relativo en (40, 45).
(para x=40 CM(40)=20+5+20=45)

Veamos si es el mínimo absoluto, para ello debemos representar gráficamente la función CM(x)

$$CM(x)=\frac{x}{2}+5+\frac{800}{x}=\frac{x^2+10x+1600}{2x}$$

como x representa los litros producidos, x≥0

$a)\ Dom\ CM=(0,+\infty)$

$b)\ Asíntotas:$

$AV \quad x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2+10x+1600}{2x}\right)=\frac{1600}{0}=+\infty \quad\Rightarrow\quad x=0 \text{ es } AV$$

$para\ x>0\ num.\ y\ den.\ son\ positivos \rightarrow el\ lím.\ es\ positivo$

$AH \quad no\ hay$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+10x+1600}{2x}\right)=\infty \ porque\ grd(num)>grad(deno)$$

$$AO \quad y=\frac{1}{2}x+5$$

como grd(numerador)-grd(denominador)=2-1=1, hay asíntota oblicua.
Efectuamos la división polinómica,

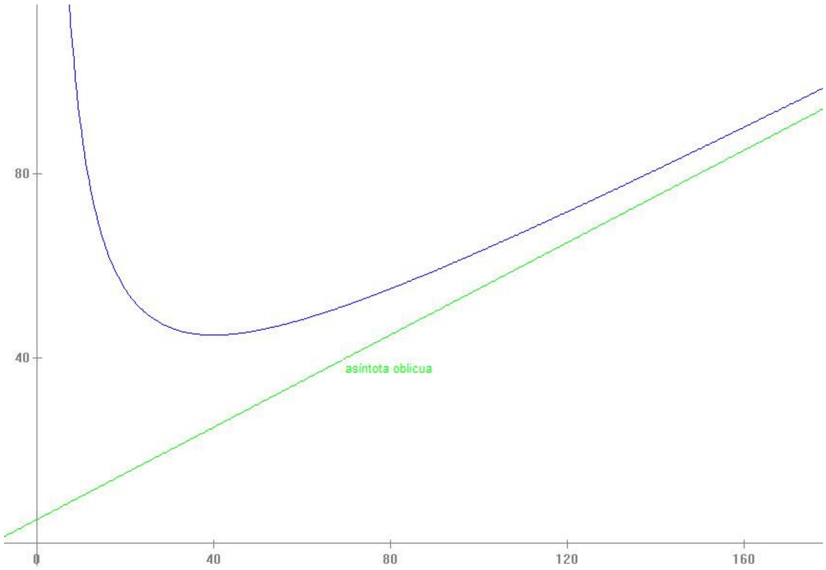
$$\begin{array}{l|l} x^2+10x+1600 & 2x \\ \hline -x^2 & \frac{1}{2}x+5 \\ \hline +10x & \\ -10x & \\ \hline +1600 & \end{array}$$

Veamos la posición de la curva respecto de la asíntota oblicua,

$$\frac{x^2+10x+1600}{2x}=\left(\frac{1}{2}x+5\right)+\frac{1600}{2x}$$

Cuando $x\to+\infty \quad \frac{1600}{2x}>0 \quad \Rightarrow$ *la función está por encima de la asíntota.*

Con la información del mínimo relativo y la posición de la curva respecto de sus asíntotas podemos trazar un esbozo de la función:



Luego el mínimo relativo es un mínimo absoluto. Por ello el coste medio será mínimo con una producción de 40 litros y este coste será de 45 €.