

**EJERCICIO A**

**PROBLEMA 1.** Obtener la matriz  $X$  que verifica  $A X - B = 3 X$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Solución:*

Despejamos la matriz  $X$  de la expresión  $A X - B = 3 X$

$$A X - 3 X = B$$

$(A - 3 I) X = B$ ; si existe la inversa de la matriz  $(A - 3 I)$ , multiplicamos por la izquierda

$(A - 3 I)^{-1} (A - 3 I) X = (A - 3 I)^{-1} B$ ; efectuando las operaciones,

$X = (A - 3 I)^{-1} B$ ; obteniendo la matriz  $X$  buscada.

Calculamos la matriz  $A - 3 I$ ,

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz  $A - 3 I$ ,

$$|A - 3I| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 4 - 6 = -5 \neq 0$$

como es distinto de cero podemos calcular  $(A - 3 I)^{-1}$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \left( \begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_j} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I)^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-9}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos el valor de la matriz  $X$ ,

$$X = (A - 3I)^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-9}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \\ \frac{18}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{9}{5} \\ \frac{28}{5} \end{pmatrix}$$

El resultado final es, 
$$X = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 9/5 \\ 28/5 \end{pmatrix}$$