

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Se quiere imprimir un cartel anunciador rectangular que debe contener 18 cm^2 de texto impreso (también rectangular). Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno, mientras que los laterales deben ser de 1 cm. Calcular las dimensiones del cartel para que el gasto de papel sea mínimo y justificar que dicho gasto es realmente mínimo.

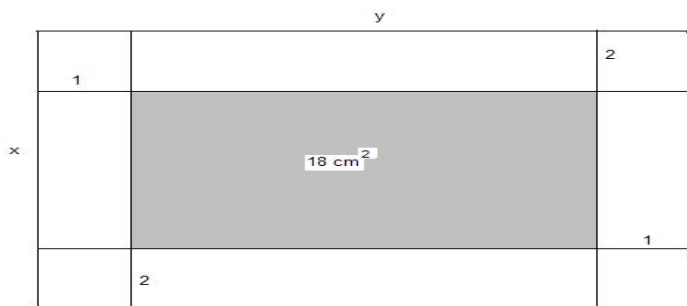
Solución:

Utilizamos las siguientes variables,

$$x = \text{alto del cartel}$$

$$y = \text{ancho del cartel}$$

El problema que queremos resolver podemos representarlo de la siguiente forma,



El gasto del cartel estará en función de la dimensión del cartel, es decir, $G = xy$ que será la función a minimizar. La relación entre las variables x e y viene dada por los 18 cm^2 de texto impreso que debe tener el cartel, por lo tanto $(x - 4)(y - 2) = 18$, despejamos de esta expresión la variable y ,

$$y - 2 = \frac{18}{x - 4} \rightarrow y = \frac{18}{x - 4} + 2$$

Por lo que $G = x \left(\frac{18}{x - 4} + 2 \right) = \frac{18x}{x - 4} + 2x$

Calculamos $G' = \frac{18(x - 4) - 18x}{(x - 4)^2} + 2 = \frac{18x - 72 - 18x}{(x - 4)^2} + 2 = \frac{-72}{(x - 4)^2} + 2$

Calculamos $G'' = \frac{72 \cdot 2(x - 4)}{(x - 4)^3} = \frac{144}{(x - 4)^2}$

$$G' = 0 \rightarrow \frac{-72}{(x - 4)^2} + 2 = 0 \rightarrow \frac{-72}{(x - 4)^2} = -2 \rightarrow -72 = -2(x - 4)^2 \rightarrow (x - 4)^2 = 36 \rightarrow x - 4 = \pm 6$$

Dos posibles soluciones: $\begin{cases} x - 4 = 6 \rightarrow x = 10 \\ x - 4 = -6 \rightarrow x = -2 \end{cases}$ No es válida, la longitud de un lado no puede ser negativa.

$$G''(10) = \frac{144}{(10 - 4)^2} = \frac{144}{36} > 0 \rightarrow \text{En } x = 10 \text{ la función } G \text{ alcanza un mínimo relativo.}$$

$$\text{Para } x = 10 \rightarrow y = \frac{18}{10 - 4} + 2 = \frac{18}{6} + 2 = 3 + 2 = 5$$

Solución: el cartel será un rectángulo de base 5 cm y alto 10 cm.