EJERCICIO A

PROBLEMA 3. a) Determina el valor de a para que la función sea continua en x = – 1:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a & x<-1 \\ a\,x+2 & -1\le x<1 \\ \dfrac{2x-11}{x-3} & x\ge 1 \end{cases}$$

b) Estudia la continuidad de la función anterior para a = 0.
c) Halla la integral entre – 2 y 2 de la función $f(x) = x^3 – 2$.

Solución:

a) ¿a? para que f sea continua en x = – 1

1) ¿Existe f(– 1)?

f(– 1) = a (– 1) + 2 = 2 – a, por lo tanto existe f(– 1).

2) ¿Existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(3x+a)=-3+a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(ax+2)=-a+2 \end{cases}$$ *para que exista* $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ *debe ser*

– 3 + a = – a + 2; a + a = 2 + 3; 2 a = 5; $a=\dfrac{5}{2}$

Para que exista el límite $a=\dfrac{5}{2}$.

Para este valor de a se cumple:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & f(-1)=2-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-1}{2} \\ 2) & \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{-1}{2} \\ 3) & f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x) \end{array}\right\} \textit{luego para } a=\frac{5}{2}\ f(x) \textit{ es continua en } x=-1.$$

b) a = 0

Para a = 0 la función es: $$f(x)=\begin{cases} 3x & x<-1 \\ 2 & -1\le x<1 \\ \dfrac{2x-11}{x-3} & x\ge 1 \end{cases}$$

Estudiemos la continuidad de esta función.

Para x < – 1 f(x) = 3 x, función polinómica, luego continua.

Para – 1 < x < 1 f(x) = 2, función constante, luego continua.

Para x > 1 $f(x)=\dfrac{2x-11}{x-3}$ *, función racional, es continua excepto en x = 3 (valor que anula el denominador)*

Veamos en los cambios de definición de la función,

x = – 1

1) f(– 1) = 2

2) $$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 3x=-3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 2=2 \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos, no existe el límite.

f(x) no es continua en $x = -1$. Por existir los límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

x = 1

$$1)\quad f(1) = \frac{2\,.\,1-11}{1-3} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$$

$$2)\quad \lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-11}{x-3} = \dfrac{2-11}{1-3} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos, no existe el límite.

f(x) no es continua en $x = 1$. Por existir los límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

Veamos el tipo de discontinuidad en $x = 3$,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2x-11}{x-3} = \frac{2\,.\,3-11}{3-3} = \frac{-5}{0} = \infty$$

discontinuidad de salto infinito.

En resumen, para $a = 0$, f(x) es continua en $\Re - \{-1, 1, 3\}$
en $x = -1$ y $x = 1$ presenta una discontinuidad de salto finito
y en $x = 3$ presenta una discontinuidad de salto infinito.

c)

$$\int_{-2}^{2}\left(x^3-2\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}-2x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{2^4}{4}-2\,.\,2\right)-\left(\frac{(-2)^4}{4}-2\,.\,(-2)\right) = (4-4)-(4+4) = -8$$