EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, se pide

a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos relativos.
e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Solución:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

$x^2 + 1 = 0$; $x^2 = -1$ no tiene soluciones reales por lo tanto, $Dom\ f = \Re$

$$x = 0 \quad \to \quad y = \frac{2\,.\,0}{0^2+1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \to \quad (0,0)$$

$$y = 0 \quad \to \quad 0 = \frac{2x}{x^2+1} \quad \to \quad 0 = 2x \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad (0,0)$$

Por lo tanto el punto de corte con los ejes coordenados es (0,0)

b) Ecuación de sus asíntotas.

- asíntotas verticales

Como el dominio de la función son todos los números reales, no tiene asíntotas verticales.

- asíntota horizontal

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

de igual manera $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$

la asíntota horizontal será $y = 0$.

-asíntota oblicua

grd (numerador) – grd (denominador) = 1 – 2 = – 1, como no es 1, no hay asíntota oblicua.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$y' = \frac{2(x^2+1) - 2x\,2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

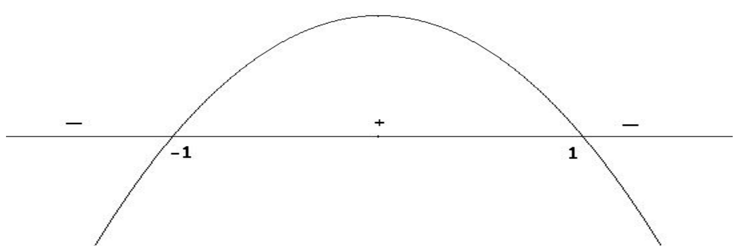
estudiemos el signo de y´, para ello buscamos las raíces del numerador y denominador

$$2 - 2x^2 = 0 \quad \to \quad 2 = 2x^2 \quad \to \quad x^2 = 1 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$(x^2+1)^2 = 0 \quad \to \quad x^2+1 = 0 \quad \to \quad \text{no tiene soluciones reales}$$

Como el denominador de y´ es una expresión al cuadrado siempre será positivo; el signo de y´ sólo depende del numerador.

Gráficamente el polinomio del numerador es una parábola como sigue (a<0)



Por lo tanto,

f es creciente en (– 1 , 1) y

f es decreciente en $(-\infty\,,-1) \cup (1\,,+\infty)$

d) Máximos y mínimos relativos.

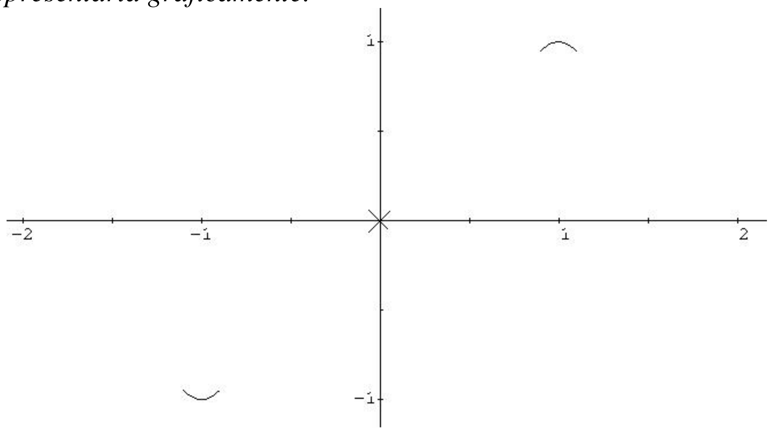
Del estudio realizado en el apartado anterior se deduce que

en $x = -1$ hay un mínimo $f(-1) = \dfrac{2(-1)}{(-1)^2 + 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$ *Mínimo relativo en (– 1 , – 1)*

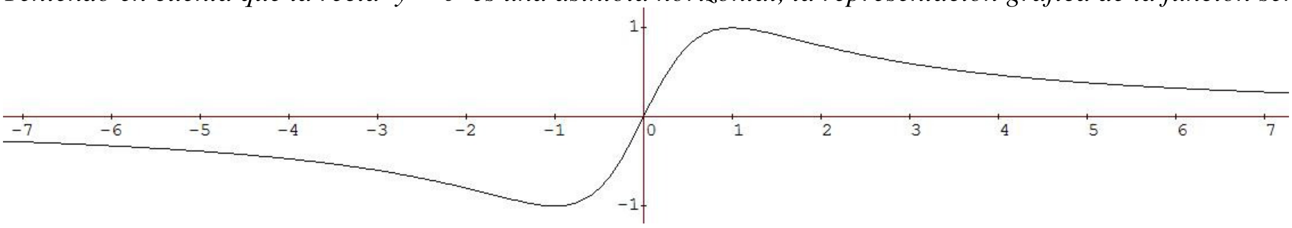
en $x = 1$ hay un máximo $f(1) = \dfrac{2\,.\,1}{1^2 + 1} = \dfrac{2}{2} = 1$ *Máximo relativo en (1 , 1)*

e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Marcamos en los ejes coordenados:
el punto de corte (0,0),
el mínimo relativo y
el máximo relativo



Teniendo en cuenta que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, la representación gráfica de la función será:



esta gráfica cumple los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos.