

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Dados dos sucesos aleatorios independientes se sabe que la probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es $3/25$ y la de que ocurra al menos uno de los dos es $17/25$. Calcula la probabilidad de cada uno de los dos sucesos.

Solución:

Sean A y B los sucesos aleatorios. Sabemos que,

la probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es $3/25$, $p(A \cap B) = \frac{3}{25}$

la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos es $17/25$ $p(A \cup B) = \frac{17}{25}$

Busquemos una relación entre las probabilidades conocidas y las de los sucesos A y B .

Como los sucesos son independientes

$$p(A/B) = p(A) \quad \text{y} \quad p(B/A) = p(B)$$

como $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \rightarrow \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Por otro lado sabemos que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Podemos plantear el siguiente sistema,

$$\begin{cases} p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{17}{25} = p(A) + p(B) - \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25} = p(A) \cdot p(B) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{20}{25} = p(A) + p(B) \\ \frac{3}{25} = p(A) \cdot p(B) \end{cases}$$

de 1ª, $p(A) = \frac{20}{25} - p(B)$

sustituyendo en la 2ª, $\frac{3}{25} = \left[\frac{20}{25} - p(B) \right] \cdot p(B)$

$$\frac{3}{25} = \frac{20}{25} p(B) - [p(B)]^2$$

$$[p(B)]^2 - \frac{20}{25} p(B) + \frac{3}{25} = 0$$

$$p(B) = \frac{\frac{20}{25} \pm \sqrt{\left(-\frac{20}{25}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{3}{25}}}{2 \cdot 1} = \frac{\frac{20}{25} \pm \sqrt{\frac{400}{625} - \frac{12}{25}}}{2} = \frac{\frac{20}{25} \pm \sqrt{\frac{400}{625} - \frac{300}{625}}}{2} = \frac{\frac{20}{25} \pm \sqrt{\frac{100}{625}}}{2} = \frac{\frac{20}{25} \pm \frac{10}{25}}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{\frac{20}{25} + \frac{10}{25}}{2} = \frac{\frac{30}{25}}{2} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \\ \frac{\frac{20}{25} - \frac{10}{25}}{2} = \frac{\frac{10}{25}}{2} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Si $p(B) = \frac{3}{5} \rightarrow p(A) = \frac{20}{25} - \frac{3}{5} = \frac{20-15}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

Si $p(B) = \frac{1}{5} \rightarrow p(A) = \frac{20}{25} - \frac{1}{5} = \frac{20-5}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

Por lo tanto las probabilidades de los dos sucesos pueden ser,

$$1^a) \quad p(A) = \frac{1}{5} \quad y \quad p(B) = \frac{3}{5}$$

o

$$2^a) \quad p(A) = \frac{3}{5} \quad y \quad p(B) = \frac{1}{5}$$