Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II   Septiembre 2007

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & 0\le x<2 \\ x^2-6x+12 & 2\le x\le 4 \\ -2x+a & 4\le x\le 8 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a para que la función y = f(x) sea continua en el intervalo [0,8].
b) Halla los máximos y mínimos absolutos de y = f(x) en el intervalo [0,4]. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos absolutos.
c) Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas de ecuación y = 0, x = 0, x = 3 y la gráfica de y = f(x).

Solución:

a) Estudiamos la función en cada trozo de definición y en los puntos de cambio de definición.

En [0 , 2), f(x) = x + 2 es un polinomio, luego es continua

En (2 , 4), f(x) = $x^2 - 6x + 12$ *es un polinomio, luego es continua*

En (4 , 8], f(x) = – 2 x + a es un polinomio, luego es continua

Veamos si es continua en x = 2,

i) $f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 12 = 4$

ii)

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-6x+12)=4 \end{array}\right\}=4$$

iii)

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$$

Por lo que f(x) es continua en x = 2

Veamos si es continua en x = 4

i) $f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 12 = 16 - 24 + 12 = 4$

ii)

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-6x+12)=4 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-2x+a)=-2.4+a=-8+a \end{cases}$$

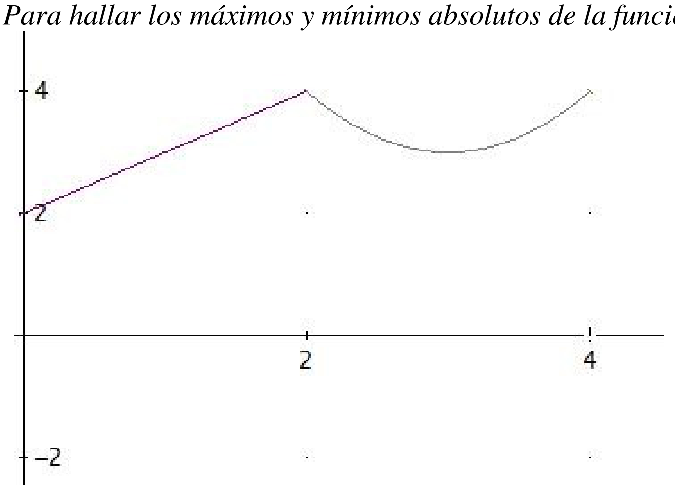
Para que exista el límite debe ser 4 = – 8 + a; a = 12

Para a = 12 se cumple que $f(4)=\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ *, por lo que f(x) es continua en x = 4*

En conclusión, para que f(x) sea continua en el intervalo [0 , 8] debe ser a = 12

b)

Para hallar los máximos y mínimos absolutos de la función en el intervalo [0 , 4] podemos representar la función,



En [0 , 2] f(x) = x + 2, es una función creciente, el mínimo absoluto está en su extremo inferior y el máximo absoluto en su extremo superior.

En [2 , 4] f(x) = $x^2 - 6x + 12$ *que por ser una parábola con coeficiente de* x^2 *positivo alcanza su mínimo absoluto en el vértice,* $x=\dfrac{-(-6)}{2.1}=3\in[2,4]$

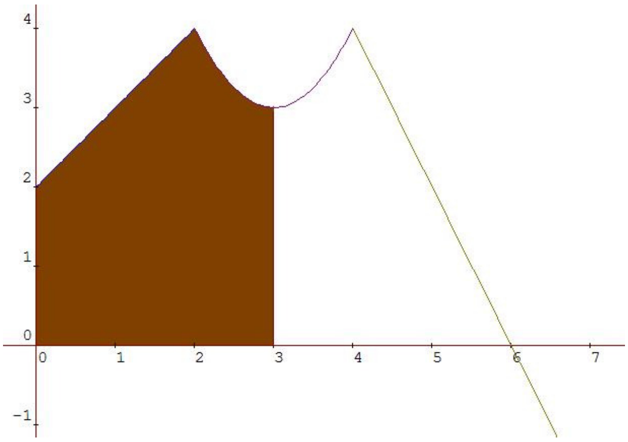
y el máximo absoluto en alguno de lo extremos del intervalo. Calculemos el valor de la función en los puntos indicados.

x	$f(x)$
0	2
2	4
3	$3^2-6.3+12=3$
4	4

Por lo tanto el mínimo absoluto está en el punto (0 , 2) y los máximos absolutos en los puntos (2 , 4) y (4 , 4).

c)

El área a calcular es la de la zona sombreada



El cálculo del área es:

$$A=\int_0^2 (x+2)dx+\int_2^3 \left(x^2-6x+12\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+12x\right]_2^3=$$

$$=\frac{4}{2}+4+\left(\frac{27}{3}-27+36\right)-\left(\frac{8}{3}-12+24\right)=2+4+\frac{27}{3}+9-\frac{8}{3}-12=3+\frac{19}{3}=\frac{28}{3}\ u.a.$$