Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II   Septiembre 2007

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x-3}$, se pide

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:
a)
Dominio,

$$2x-3=0; \quad x=\frac{2}{3}; \qquad Dom\ f = \Re - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Puntos de corte,

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad \rightarrow \quad y=\dfrac{0+4}{0-3}=\dfrac{-4}{3} \\ y=0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2+4}{2x-3}=0 \quad \rightarrow \quad x^2+4=0 \quad no\ tiene\ solución \end{array}\right\} \left(0\,,\frac{-4}{3}\right)$$

b) Asíntotas verticales,

$$Veamos\ si\ x=\frac{3}{2}\ es\ \ a.v.$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{x^2+4}{2x-3} = \frac{\frac{9}{4}+4}{2\frac{2}{3}-3} = \frac{\frac{25}{4}}{0} = \infty \qquad \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}\ es\ \ a.v.$$

Asíntotas horizontales,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4}{2x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

No hay asíntota horizontal

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Debemos estudiar el signo de la primera derivada,

$$f'(x) = \frac{2x(2x-3)-\left(x^2+4\right)2}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2-6x-2x^2-8}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-8}{(2x-3)^2}$$

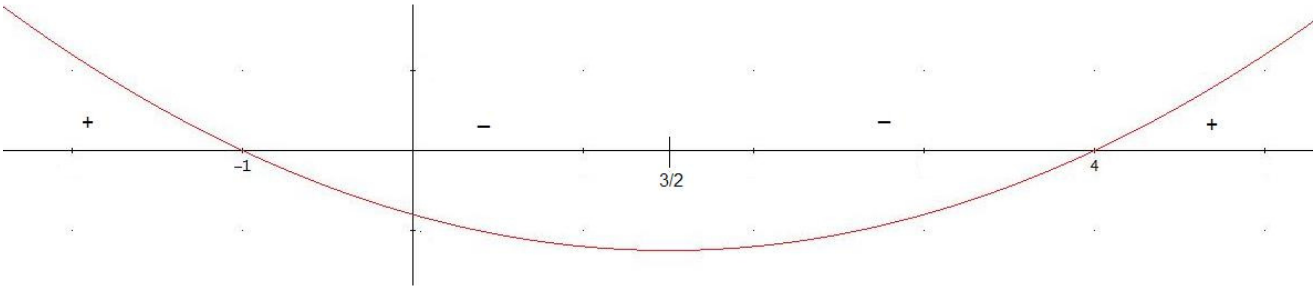
Busquemos las raíces del numerador y del denominador,

$$2x^2-6x-8=0 \quad \rightarrow \quad x^2-3x-4=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{3+5}{2}=4 \\ \dfrac{3-5}{2}=-1 \end{array}\right.$$

$$(2x-3)^2=0 \quad \rightarrow \quad 2x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

Debemos considerar también el valor que no es del dominio de la función, coincide con la última raíz obtenida.

Marcamos en la recta real las tres raíces obtenidas. Como el denominador de f´ está elevado al cuadrado siempre es positivo, luego el signo de f´ sólo depende del signo del numerador. Como el numerador es un polinomio de 2º grado sabemos que gráficamente es una parábola y esto nos sirve para determinar su signo.



$f(x)$ *es creciente en* $(-\infty\,,-1)\cup(4\,,+\infty)$

$f(x)$ *es decreciente en* $\left(-1\,,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2}\,,4\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

El estudio realizado en el apartado anterior no permite encontrar los extremos locales de esta función,

Máximo (– 1 , – 1)

$$x=-1 \quad\to\quad f(-1)=\frac{(-1)^2+4}{2(-1)-3}=\frac{5}{-5}=-1$$

Mínimo (4 , 4)

$$x=4 \quad\to\quad f(4)=\frac{4^2+4}{2\,.\,4-3}=\frac{20}{5}=4$$

e) Representación gráfica.

Trazamos la asíntota vertical, el punto de corte, el máximo y el mínimo locales y considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la gráfica es