EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Dada la función y = $x^3 - 9x^2 + 24x + 3$:

a) Calcula los máximos y mínimos locales. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos locales.

b) Halla el área de la región del plano determinada por la gráfica de y = f(x) y las rectas y = 0, x = 0, y x = 5.

Solución:

a)

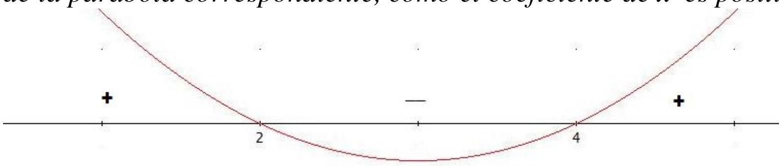
$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

$3x^2 - 18x + 24 = 0; \quad x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

Como la primera derivada es un polinomio de 2º grado estudiamos el signo de y´ a través de la representación gráfica de la parábola correspondiente, como el coeficiente de x^2 es positivo será

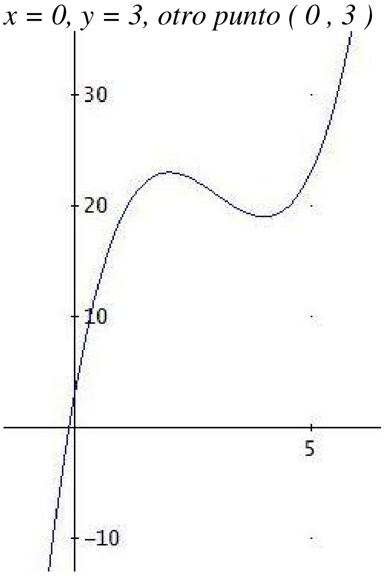


En x = 2, la función pasa de creciente a decreciente por lo que presenta un máximo local.
En x = 4 la función pasa de decreciente a creciente por lo que presenta un mínimo local.

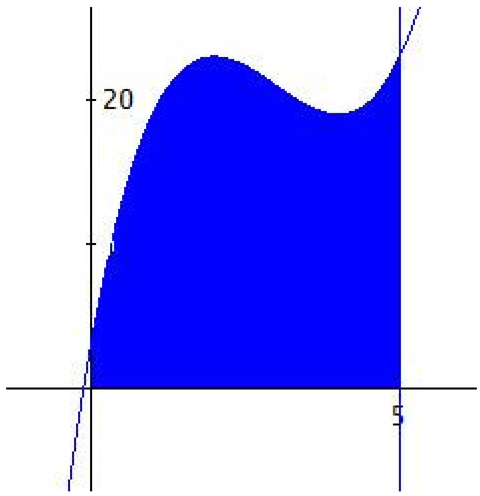
x = 2, $y = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 3 = 8 - 36 + 48 + 3 = 59 - 36 = 23$. *Máximo local (2 , 23)*
x = 4, $y = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 3 = 64 - 144 + 96 + 3 = 163 - 144 = 19$. *Máximo local (4 , 19)*

b) Como y es una función polinómica de tercer grado con los datos del apartado anterior y algún punto más podemos representarla,

x = 0, y = 3, otro punto (0 , 3)



La región del plano de la que debemos calcular su área será



Este área podemos calcularla mediante la siguiente integral

$$A = \int_0^5 \left(x^3 - 9x^2 + 24x + 3\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 + 3x\right]_0^5 = \frac{625}{4} - 3 \cdot 125 + 12 \cdot 25 + 15 = 96´25 \; u.a.$$