EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Dominio

$$1-x^2=0 \quad \rightarrow \quad 1=x^2 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1 \quad \rightarrow \quad Dom\ y=\Re-\{-1,1\}$$

Corte eje OY

$$x=0 \quad \rightarrow \quad y=\frac{0^3}{1-0^2}=\frac{0}{1}=0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$$

Corte eje OX

$$y=0 \quad \rightarrow \quad 0=\frac{x^3}{1-x^2} \quad \rightarrow \quad 0=x^3 \quad \rightarrow \quad 0=x \quad \Rightarrow \quad (0,0)$$

El punto de corte con los ejes coordenados es el (0 , 0)

b) Asíntotas verticales y horizontales

Las posibles asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = -1$ (los valores de x que no son del dominio)

Veamos si $x = -1$ es a.v.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{(-1)^3}{1-(-1)^2}=\frac{-1}{1-1}=\frac{-1}{0}=\infty \qquad \rightarrow \quad x=-1 \ \textit{es a.v.}$$

Veamos si $x = 1$ es a.v.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{1^3}{1-1^2}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty \qquad \rightarrow \quad x=1 \ \textit{es a.v.}$$

Posteriormente, si es necesario, estudiaremos la posición de la curva respecto de estas asíntotas.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{-x^2}=\lim_{x\to -\infty}(-x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\left(\frac{\infty}{-\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{-x^2}=\lim_{x\to +\infty}(-x)=-\infty$$

luego no tiene asíntota horizontal.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$$y=\frac{x^3}{1-x^2}$$

$$y'=\frac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{3x^2-3x^4+2x^4}{(1-x^2)^2}=\frac{-x^4+3x^2}{(1-x^2)^2}$$

Estudiemos el signo de y',

raíces de numerador,

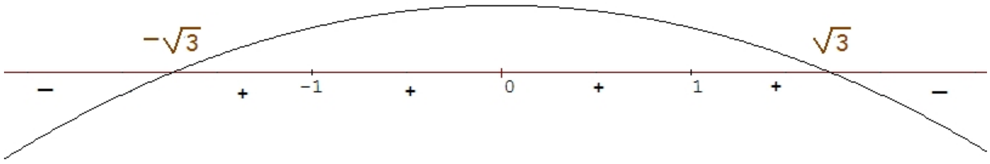
$$-x^4+3x^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2(-x^2+3)=0 \quad \begin{cases} x^2=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \\ -x^2+3 \quad \rightarrow \quad x^2=3 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

raíces del denominador,

$$\left(1-x^2\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad 1-x^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1$$

Marcamos en la recta real todas las raíces que hemos obtenido y consideramos el dominio de la función.

Como en la función el denominador es una expresión al cuadrado, positivo, el denominador no aporta signo a la función. En el numerador hay dos factores x^2 *y* $(-x^2+3)$*;* x^2 *es positivo. Por lo tanto el signo de y´ sólo depende del de* $-x^2+3$*. Por lo tanto*



Creciente $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$

Decreciente $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

d) Máximos y mínimos locales

Los extremos locales de la función los buscamos en los puntos donde se produce un cambio de crecimiento a decrecimiento o viceversa. Luego,

$$x=-\sqrt{3} \quad \textit{mínimo} \quad y=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-3}=\frac{-3\sqrt{3}}{-2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

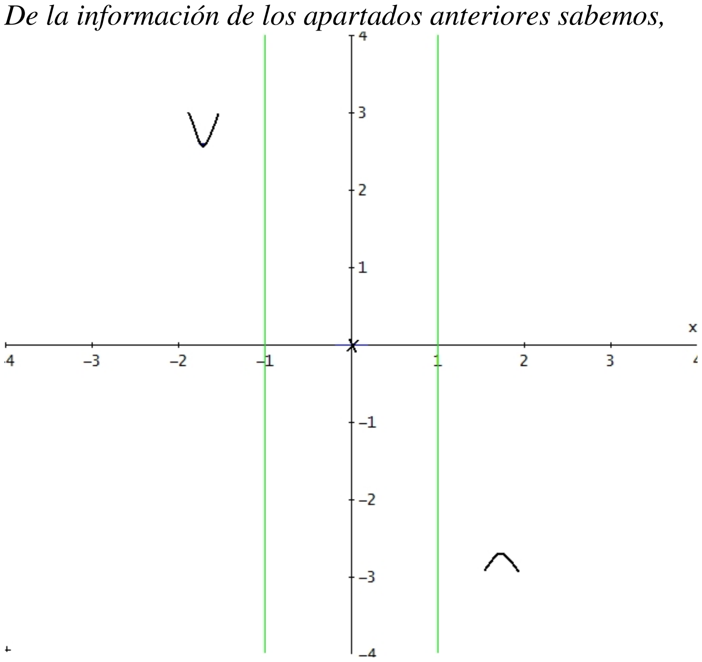
$$x=\sqrt{3} \quad \textit{máximo} \quad y=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{1-3}=\frac{3\sqrt{3}}{-2}=\frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$\textit{Mínimo local} \quad \left(-\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \quad y \quad \textit{máximo local} \quad \left(\sqrt{3},\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$$

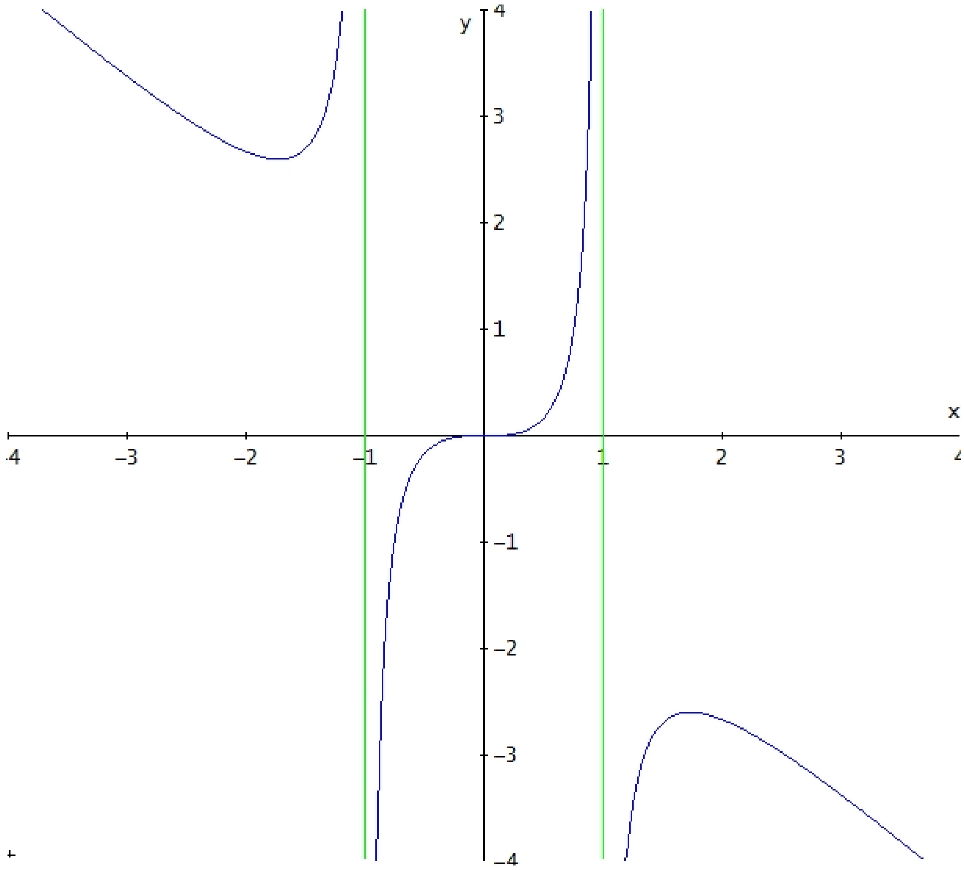
$$(-1´73\,,\,2´59) \qquad\qquad (1´73\,,\,-2´59)$$

e)

De la información de los apartados anteriores sabemos,



Como entre -1 *y* 1 *la función es creciente, la representación será:*


y
x
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
-4
−3
−2
−1
1
2
3