

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Halla su inversa.

b) Resuelve la ecuación $X A^2 + 5 A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Cálculo de A^{-1}

La obtendremos por el método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 4 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 4x F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & -10 & | & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + \frac{3}{10} F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2/10 & 3/10 \\ 0 & -10 & | & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 / (-10)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & | & 4/10 & -1/10 \end{pmatrix}$$

Cálculos auxiliares	
$F_2 - 4 F_1$	$F_1 + \frac{3}{10} F_2$
$4 - 4 = 0$	F_2
$2 - 4 = -2$	$1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$
$0 - 4 = -4$	$0 = 0$
$1 - 4 = -3$	$3 + \frac{3}{10} = \frac{33}{10}$
$0 = 0$	$(-10) = -10$
	$1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$
	$(-4) = -4$
	$0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$
	$1 = 1$
	$1 - \frac{12}{10} = \frac{-2}{10}$
	$\frac{3}{10}$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/10 & 3/10 \\ 4/10 & -1/10 \end{pmatrix}$

b)

Sea $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$

La ecuación a resolver es $X A^2 + 5 A = B$, multiplicando por A^{-1} por la izquierda,

$$X A A A^{-1} + 5 A A^{-1} = B A^{-1}, \text{ como } A A^{-1} = I,$$

$$X A I + 5 I = B A^{-1}$$

$$X A + 5 I = B A^{-1}, \text{ despejamos } X A$$

$$X A = B A^{-1} - 5 I, \text{ multiplicando por } A^{-1} \text{ por la izquierda,}$$

$$X A A^{-1} = (B A^{-1} - 5 I) A^{-1}, \text{ y finalmente}$$

$$X = (B A^{-1} - 5 I) A^{-1}$$

Procedamos al cálculo de la matriz X

$$B A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/10 & 3/10 \\ 4/10 & -1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12}{10} + \frac{32}{10} & \frac{18}{10} - \frac{8}{10} \\ \frac{-20}{10} - \frac{80}{10} & \frac{30}{10} + \frac{20}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B A^{-1} - 5I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (B A^{-1} - 5I) A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/10 & 3/10 \\ 4/10 & -1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} + \frac{4}{10} & \frac{-9}{10} - \frac{1}{10} \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$