EJERCICIO B

PROBLEMA 3. La cuenta de resultados (pérdidas o ganancias) en millones de euros, y , de una empresa vienen dadas por la siguiente función de los años de existencia de la misma:

$$y = \frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7}$$

a) ¿A partir de qué año deja la empresa de tener pérdidas?
b) ¿En qué momento alcanza la empresa sus ganancias máximas? ¿A cuánto ascienden éstas?
c) Describe la evolución de la cuenta de resultados de la empresa. ¿Cuáles serán sus beneficios a muy largo plazo?

Solución:

Por definición de x, años de existencia de la empresa, $x \geq 0$

y *como* $\forall x \in \Re \quad x^2 + 7 \neq 0 \quad \rightarrow \quad Dom\ y = [\,0, +\infty)$

a) La empresa dejará de tener pérdidas cuando y > 0, luego debemos resolver la siguiente inecuación,

$$\frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7} > 0$$

como para cualquier valor de x, $x^2 + 7$ es positivo, sólo necesitamos estudiar el signo del numerador.

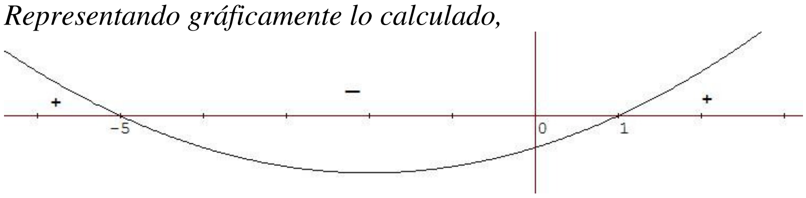
$5x^2 + 20x - 25 > 0$ Resolvamos esta inecuación,

$5x^2 + 20x - 25 = 0$, simplificando entre 5

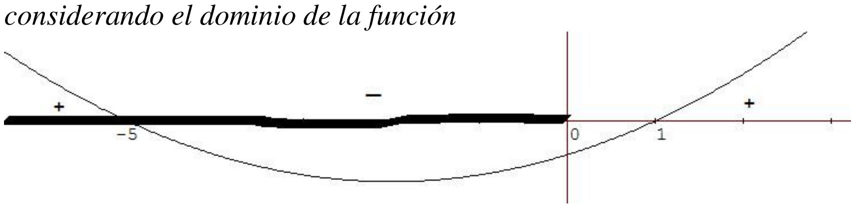
$x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\,.\,1\,.\,(-5)}}{2\,.\,1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+6}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-4-6}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

Representando gráficamente lo calculado,



considerando el dominio de la función



Por lo tanto y > 0 para x > 1. Es decir que la empresa dejará de tener perdidas a partir del primer año de existencia

b) Ganancias máximas y a cuánto ascienden.

Busquemos los extremos de la función y

$$y' = \frac{(10x+20)(x^2+7) - (5x^2+20x-25)2x}{(x^2+7)^2} = \frac{10x^3 + 20x^2 + 70x + 140 - 10x^3 - 40x^2 + 50x}{(x^2+7)^2} =$$

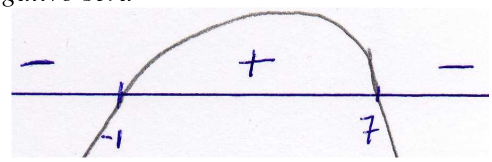
$$= \frac{-20x^2 + 120x + 140}{(x^2+7)^2}$$

$$y' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-20x^2 + 120x + 140}{(x^2+7)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad -20x^2 + 120x + 140 = 0 \quad \textit{simplificando entre 20}$$

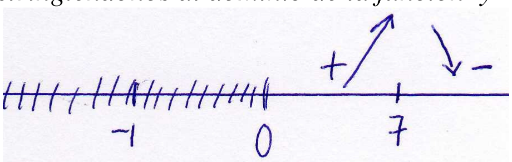
$$-x^2+6x+7=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(-1)7}}{2(-1)}=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{-2}=\frac{-6\pm\sqrt{64}}{-2}=\frac{-6\pm 8}{-2}=$$

$$=\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-6+8}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1 \\ \dfrac{-6-8}{-2}=\dfrac{-14}{-2}=7 \end{array}\right.$$

Estudiemos el signo de y´. Como el denominador de y´ es $(x^2 + 7)^2$, siempre es positivo; el signo de y´ depende del numerador que gráficamente es una parábola, por ser un polinomio de 2º grado, y como el coeficiente de x^2 es negativo será



Restringiéndonos al dominio de la función y



Luego en x = 7 hay un máximo relativo. Como la función y en el intervalo (0 , 7) es creciente y en el intervalo (7 , +∞) es decreciente, este máximo relativo es el absoluto de la función.

Por lo tanto la empresa alcanza sus ganancias máximas a los 7 años de su creación y estas ganancias son de

$$y=\frac{5\,.\,7^2-20\,.\,7-25}{7^2+7}=\frac{360}{56}=6´428571 \quad \textit{millones de euros}$$

es decir, unas ganancias de 6 428 571 €

c) Para obtener los beneficios a muy largo plazo calculamos el siguiente límite,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+20x-25}{x^2+7}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}5=5$$

Esto quiere decir que a muy argo plazo los beneficios se estabilizan e 5 millones de euros.

Podemos describir la evolución de la cuenta de resultados de la empresa de la siguiente forma:

- *Durante el primer año tiene pérdidas.*
- *A partir del segundo año y hasta el séptimo los beneficios crecen hasta alcanzar un máximo de 6´4 millones de euros y a partir del séptimo año los beneficios desciende pero se mantienen por encima de los 5 millones de euros.*

Gráficamente: