Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II   Septiembre 2009

BLOQUE A

PROBLEMA A1. Obtén todas las matrices columna $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que sean soluciones de la ecuación matricial $A\,X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

¿Cuáles de esas matrices X tienen la primera fila nula?

Solución:
La ecuación matricial a resolver es $A\,X = B$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuación matricial que da lugar la siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad y - z = -1 \\ x + 2y \quad = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Como $F_3 = F_2$, podemos eliminar F_3, ya que es la misma ecuación que F_2. Nos quedamos con las dos primeras filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Por debajo de la diagonal principal tenemos los ceros, pero en la diagonal principal quedan dos elementos no nulos. El sistema tenía tres incógnitas por lo que es Compatible Indeterminado.
Para resolverlo utilizamos x e y como incógnitas principales.
De la última matriz nos queda el sistema,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad y - z = -1 \end{cases}$$

pasamos la incógnita z a la derecha,

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ \quad y = -1 + z \end{cases}$$

sustituyendo el valor de y en la 1^a ecuación,
$x + (- 1 + z) = 1 - z$, efectuando operaciones
$x - 1 + z = 1 - z$, despejamos x
$x = 1 - z + 1 - z$
$x = 2 - 2z$
La solución del sistema será,

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

En forma matricial, la solución será: $X = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ -1+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \Re$

De estas matrices solución, aquella que tiene la primera fila nula será:

$$2 - 2\lambda = 0$$

$$2 = 2\lambda$$

$$\lambda = 1$$

Sustituyendo este valor en la matriz solución,

$$\begin{pmatrix} 2-2.1 \\ -1+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que es la matriz solución que tiene la primera fila nula.