BLOQUE B

PROBLEMA B1. Dada la función: $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, se pide:

a) Su dominio y punto de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de las asíntotas horizontales y verticales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

Dominio: $1+x^2=0 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$*, no tiene soluciones reales. Por lo que* $Dom\, f(x)=\Re$

Puntos de corte:

$$x=0 \quad \rightarrow \quad y=\frac{0}{1+0^2}=\frac{0}{1}=0 \quad \rightarrow (0,0)$$

$$y=0 \quad \rightarrow \quad 0=\frac{x}{1+x^2} \quad \rightarrow \quad 0=x \quad \rightarrow (0,0)$$

Sólo hay un punto de corte, el $(0,0)$

b) Ecuación de las asíntotas horizontales y verticales.

Como $Dom\, f(x)=\Re$*, la función no tiene asíntotas verticales.*

Veamos si tiene asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Por lo tanto la asíntota horizontal es la recta de ecuación $y=0$

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Debemos estudiar el signo de la primera derivada de la función.

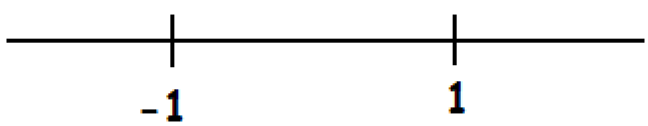
$$f'(x)=\frac{1\,.\,(1+x^2)-x\,.\,2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Para estudiar el signo de $f'(x)$ *calculamos las raíces del numerador y del denominador,*

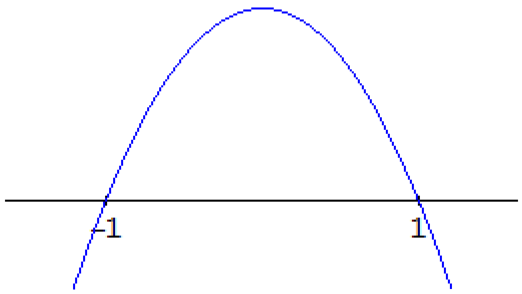
$1-x^2=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1$

$(1+x^2)^2=0 \rightarrow 1+x^2=0$ *y, como vimos al principio, esta ecuación no tiene soluciones reales.*

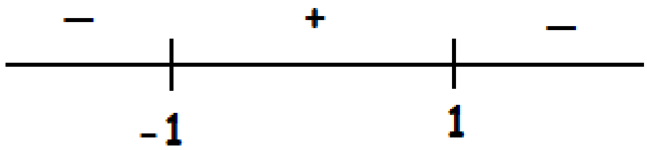
Como el dominio de la función es $\Re$*, marcamos en la recta real la soluciones obtenidas,*



Como el denominador de f´(x) es $(1 + x^2)^2$, algo elevado al cuadrado, será positivo; por lo tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerados. El numerador es $1 - x^2$, gráficamente es una parábola de gráfica:



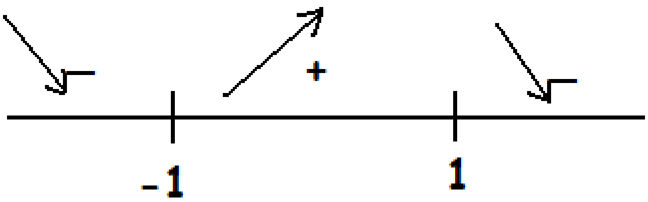
Luego el signo de f´(x) es:



Es decir: f(x) es creciente en el intervalo $(-1, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) Máximos y mínimos locales.

Según lo obtenido en el apartado anterior,



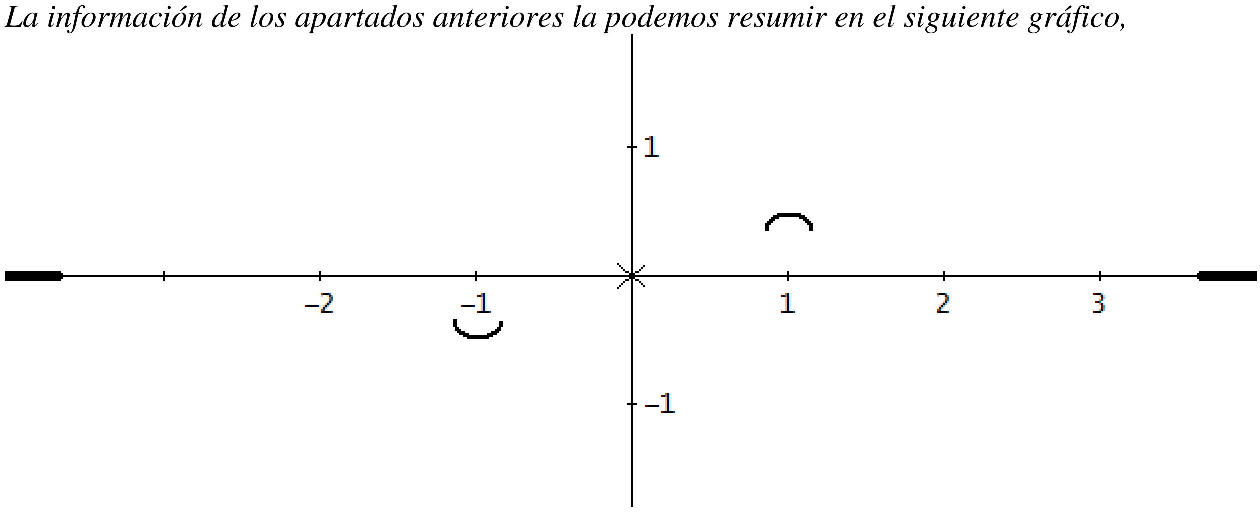
en x = 0 – 1 hay un mínimo local y en x = 1 hay un máximo local.

$$x = -1 \quad \rightarrow \quad f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2} \qquad \textit{Mínimo local en el punto } \left(-1, \frac{-1}{2}\right)$$

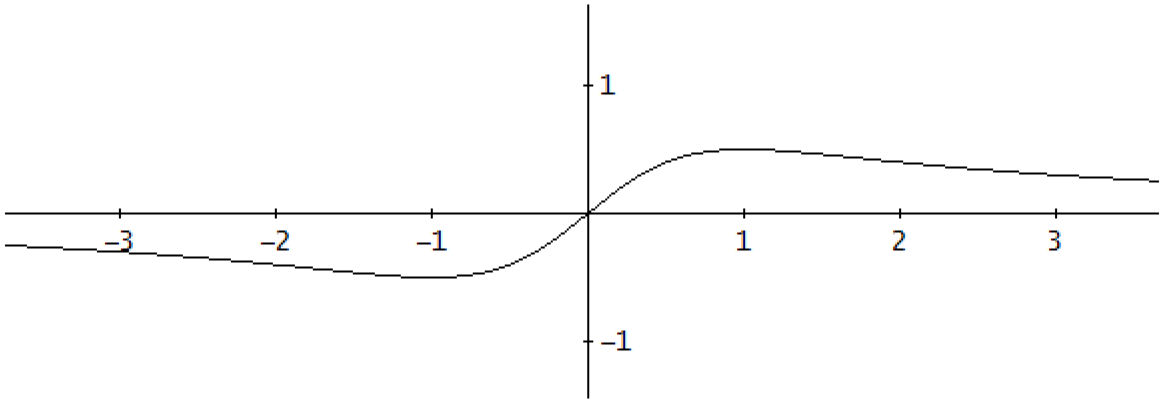
$$x = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad \textit{Máximo local en el punto } \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

La información de los apartados anteriores la podemos resumir en el siguiente gráfico,



luego la representación gráfica de f(x) será,



1
−1
−3
−2
−1
1
2
3